RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**

prova scritta del 3 luglio 2007

Rispondere alle seguenti domande marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate). Se esatta, la risposta vale 2 punti, se sbagliata –1 punto.

1. Sia $G = (V, E)$ un grafo simmetrico pesato sugli archi tramite una funzione peso c: $E \rightarrow \mathbb{N}$ (con $\mathbb{N}$ insieme dei numeri naturali). Si consideri la famiglia

$$\Im = \left\{ W \subseteq V \,\middle|\, \sum_{uv\in E: u\in W, v\in V/W} c(uv) \le k \right\}$$ definita per un certo $k > 0$.

La coppia $(V, \Im)$

[A] è un matroide
[B] è subclusiva, ma non gode della proprietà di scambio
[C] gode soltanto della proprietà di scambio

Motivare la risposta. **ERRORE NEL TESTO**

2. Il vettore $(7, 0, {}^1/_2)$ è combinazione

[A] affine
[B] convessa
[C] conica

dei vettori $(–1, 3, 0)$, $(5, –1, {}^1/_3)$ e $(0, –{}^1/_4, {}^3/_2)$.

Risolvere i seguenti problemi. La soluzione viene valutata fino a 3 punti.

3. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvere il seguente problema di programmazione lineare, esibendo il valore della soluzione ottima (e delle variabili) qualora esista, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato.

$$\begin{array}{lll}
\min & 2x_1 - x_2 + x_3 & \\
 & x_1 + 2x_2 & \le 2 \\
 & -x_2 + x_3 & \ge 1 \\
 & x_1, x_2, x_3 & \ge 0
\end{array}$$

x_1	x_2	x_3	z	$\ge$
–2	1	-1	1	0
–1	–2	0	0	–2
0	–1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\ge$
–2	1	0	1	0
–2	0	0	1	1
–1	–2	0	0	–2
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\ge$
–1	0	0	0	–2
–5	0	0	2	–2
–2	0	0	1	1
1	0	0	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\ge$
0	0	0	0	–2
0	0	0	2	–2
0	0	0	1	1

Il valore minimo di z è 1. Le variabili assumono i seguenti valori: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$.

4. Dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{array}{llll}
(P) & \min & 2x_1 - x_2 + 4x_4 & \\
 & & x_1 - 10x_2 + 3x_4 & \le -5 \\
 & & -3x_2 + 7x_3 & = -10 \\
 & & -12x_1 - 7x_2 - x_3 & \ge -6 \\
 & & x_1, x_2, x_4 & \ge 0
\end{array}$$

scriverne il duale (D).

Il problema duale è:

$$(D) \quad \max \quad 5y_1 - 10y_2 - 6y_3$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
-\ y_1 & & & - & 12y_3 & \le & 2 \\
10y_1 & - & 3y_2 & - & 7y_3 & \le & -1 \\
 & & 7y_2 & - & y_3 & = & 0 \\
-\ 3y_1 & & & & & \le & 4 \\
 & & y_1,\ y_3 & & & \ge & 0
\end{array}$$

Risolvere i seguenti problemi. La soluzione viene valutata fino a 6 punti.

4. Una cena elegante

Re Artù e sua moglie, la regina Ginevra, vogliono inaugurare il nuovo tavolo del salotto offrendo un banchetto ad amici e amiche. Consultatisi con Merlino vengono a sapere che l'etichetta prevede

- un numero di invitati compreso tra quello delle Grazie e quello delle Muse;
- un numero di dame non inferiore al numero dei cavalieri;
- una scelta tale che nessun invitato abbia motivo di inimicizia con nessun altro.

Per ottemperare all'ultimo requisito Merlino, che tutto vede, fornisce ai sovrani un grafo simmetrico nel quale i nodi corrispondono ai potenziali invitati, e gli archi collegano persone tra loro amiche.
Individuare un insieme di variabili di decisione adatte a scegliere e mettere a tavola gli invitati e, tramite queste, fornire un insieme di vincoli che esprimano il rispetto di tutte le condizioni sopra elencate.

Sia $G = (V, E)$ il grafo che esprime l'amicizia tra i potenziali invitati. Per ogni $u \in V$, sia x_u una variabile di decisione 0-1 tale che $x_u = 1$ se e solo se la persona u viene invitata al banchetto. Siccome questo grafo contiene anche i nodi a e g corrispondenti ad Artù e Ginevra, si avrà senz'altro $x_a = x_g = 1$.
La prima condizione comporta un vincolo sul numero complessivo di persone da invitare

$$3 \le \sum_{u \in V-\{a,\,g\}} x_u \le 9 \qquad \text{cioè} \qquad 3+2 \le \sum_{u \in V} x_u \le 9+2$$

Sia $V = D \cup C$, dove D è l'insieme delle dame e C quello dei cavalieri. La seconda condizione impone

$$\sum_{u \in C} x_u \le \sum_{u \in D} x_u$$

Infine, se due persone risultano non amiche, una delle due non dev'essere invitata:

$$x_u + x_v \le 1 \qquad\qquad \forall uv \notin E$$

5. Meno di così…

La composizione di una miscela industriale deve essere realizzata in modo che il prodotto finale contenga almeno 10 unità/kg di A e 4 unità/kg di B. Ogni kg di componente utilizzato per la miscela contribuisce mediamente come riportato nella tabella seguente:

	componente 1	componente 2	componente 3	componente 4
A	5	12	10	0
B	2	3	5	6
costo (€/kg)	12	21	23	18

Applicando il metodo del simplesso dimostrare che non è possibile realizzare una miscela che realizzi le specifiche prescritte a un costo $\le$ 20€/kg.

La composizione ottima della prima miscela è ottenuta risolvendo il problema

$$\begin{array}{ll}
\min & 12x_1 + 21x_2 + 23x_3 + 18x_4 \\
 & 5x_1 + 12x_2 + 10x_3 \ge 10 \\
 & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \ge 4 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{array}$$

dove x_i rappresenta la quantità di componente i presente in un kg di prodotto finale. Per calcolare il costo della miscela ottimale si può risolvere il problema duale:

$$\begin{aligned} \max \quad & 10y_A + 4y_B + z \\ & 5y_A + 2y_B + z \le 12 \\ & 12y_A + 3y_B + z \le 21 \\ & 10y_A + 5y_B + z \le 23 \\ & 6y_B + z \le 18 \\ & y_A, y_B \ge 0 \end{aligned}$$

Il problema si porta facilmente in forma standard ponendo $z = u - v$ ($u, v \ge 0$) e aggiungendo le variabili di slack:

y_A	y_B	u	v	w_1	w_2	w_3	w_4	
10	4	1	-1	0	0	0	0	0
5	2	1	-1	1	0	0	0	12
12	3	1	-1	0	1	0	0	21
10	5	1	-1	0	0	1	0	23
0	6	1	-1	0	0	0	1	18

Le successive tabelle canoniche sono

y_A	y_B	u	v	w_1	w_2	w_3	w_4	
0	$3/2$	$1/6$	$-1/6$	0	$-5/6$	0	0	$-35/2$
0	$3/4$	$7/12$	$-7/12$	1	$-5/12$	0	0	$13/4$
1	$1/4$	$1/12$	$-1/12$	0	$1/12$	0	0	$7/4$
0	$5/2$	$1/6$	$-1/6$	0	$-5/6$	1	0	$11/2$
0	6	1	-1	0	0	0	1	18

y_A	y_B	u	v	w_1	w_2	w_3	w_4	
0	0	$1/15$	$-1/15$	0	$-1/3$	$-3/5$	0	$-104/5$
0	0	$8/15$	$-8/15$	1	$-1/6$	$-3/10$	0	$8/5$
1	0	$1/15$	$-1/15$	0	$1/6$	$-1/10$	0	$6/5$
0	1	$1/15$	$-1/15$	0	$-1/3$	$2/5$	0	$11/5$
0	0	$9/5$	$-3/5$	0	2	$-12/5$	1	$24/5$

Si è ottenuta una soluzione duale $y_A = 6/5$, $y_B = 11/5$, $z = 0$, di valore 20,80€, e per il teorema debole della dualità non esiste alcuna soluzione duale di valore inferiore a questo.

$$4x_2 + 15x_3 + 9x_4 \ge 12$$

corrisponde nel problema duale all'introduzione di una nuova variabile $y_C \ge 0$.

y_A	y_B	y_C	u	v	w_1	w_2	w_3	w_4	
-1	0	12	0	0	-1	0	0	0	-12
$15/2$	0	0	1	-1	$3/2$	0	0	$-1/2$	9
$35/4$	0	4	0	0	$-1/4$	0	1	$-3/4$	$13/2$
$-5/4$	1	**5**	0	0	$-1/4$	0	0	$1/4$	$3/2$
$35/4$	0	9	0	0	$-3/4$	1	0	$-1/4$	$15/2$