RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**

prova scritta del 22 marzo 2007

Rispondere alle seguenti domande marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate). Se esatta, la risposta vale 2 punti, se sbagliata –1 punto.

1. Sia $U = \{x \in \mathbf{Z}: 1 \leq x \leq 100\}$ l'insieme dei numeri interi compresi tra 1 e 100. Per ogni intero i sia inoltre $X_i = \{x \in U: x \leq i, x = 3n$, per qualche intero $n\}$ il sottoinsieme di U contenente tutti i multipli di 3 non superiori a i. Data la famiglia $\Im = \{ X_i \subseteq U : 1 \leq i \leq 100\}$, dire se la coppia $(U, \Im)$

[A] è un matroide
[B] non gode della proprietà di scambio
[C] non è subclusiva

2. Il vettore $(^3/_2, -\,^1/_2, ^3/_2)$ è combinazione
[A] affine ma non convessa
[B] convessa, con coefficienti $\lambda_1 = \lambda_2 = ½, \lambda_3 = 0.$
[C] lineare ma non conica
dei vettori (2, 0, 3), (1, –1, 0) e (–2, 0, 1).

Risolvere i seguenti problemi. La soluzione viene valutata fino a 3 punti.

3. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ & 2x_1 - x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

esibendo (qualora esista) una soluzione ottima e il suo valore, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato.

x_1	x_2	x_3	z	$\geq$
–1	–2	0	1	0
1	–1	1	0	1
2	0	–1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\geq$
–1	–2	0	1	0
3	–1	0	0	2
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
2	0	0	0	1

x_1	x_2	x_3	z	$\geq$
–1	0	0	1	0
3	0	0	0	2
1	0	0	0	0
2	0	0	0	1

x_1	x_2	x_3	z	$\geq$
0	0	0	3	2
0	0	0	1	0
0	0	0	2	1

Il valore minimo di z è 2/3. Le variabili assumono i seguenti valori: $x_1 = {}^2/_3$, $x_2 = 0$, $x_3 = {}^1/_3$.

4. Consideriamo il seguente problema (P) di Programmazione Lineare

$$\begin{array}{lll} (P) & \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ & & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ & & x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Sia $\mathbf{y} = ({}^3/_2, 0)$ una soluzione ammissibile del problema duale (D) associato a (P). Scrivere il problema (D) e, usando le condizioni di complementarità, dire se $\mathbf{y}$ è o no una soluzione ottima di (D).

Il problema duale (D) è:

$$\begin{array}{ll} \min & 2y_1 + 3y_2 \\ & y_1 + y_2 \geq 1 \\ & 2y_1 + 4y_2 \geq 2 \\ & 2y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Le condizioni di complementarità si scrivono:

$$\begin{aligned} & y_1(2 - x_1 - 2x_2 - 2x_3) = 0 \\ & y_2(3 - x_1 - 4x_2 - 2x_3) = 0 \\ & x_1(y_1 + y_2 - 1) = 0 \\ & x_2(2y_1 + 4y_2 - 2) = 0 \\ & x_3(2y_1 + 2y_2 - 3) = 0 \end{aligned}$$

Sostituendo il punto dato $\mathbf{y} = ({}^3/_2, 0)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} & {}^3/_2(2 - x_1 - 2x_2 - 2x_3) = 0 \\ & 0 = 0 \\ & x_1/2 = 0 \\ & x_2 = 0 \\ & 0 = 0 \end{aligned}$$

da cui si ricava: $\mathbf{x} = (0,0,1)$. La soluzione trovata è ammissibile per (P), quindi $\mathbf{y}$ è una soluzione ottima di (D).

Risolvere i seguenti problemi. La soluzione viene valutata fino a 5 punti.

5. **Regressione quasi lineare**

Si vuole approssimare una data nuvola di punti $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ di $\mathbb{R}^2$ con una spezzata costituita da due semirette di equazioni $y = m_1x + q_1$ $(x \le x_0)$, $y = m_2x + q_2$ $(x \ge x_0)$ che si incontrano nel punto (x_0, y_0), con $x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_0 < x_{k+1} < \dots < x_n$. Definita per $i \le k$ (per $i > k$) la distanza di (x_i, y_i) dalla prima (dalla seconda) semiretta pari alla differenza tra le ordinate del punto e della semiretta nell'ascissa del punto stesso, formulare un problema di programmazione lineare la cui soluzione ottima individui m_1, m_2, q_1, q_2 e y_0 minimizzando la somma delle distanze dei punti dati dalle semirette.

Sia d_i la distanza del punto i-esimo dalla semiretta di sua pertinenza. Il problema si scrive

$$\begin{array}{llll} \min & d_1 + \dots + d_k + d_{k+1} + \dots d_n & & \\ & d_i \ge y_i - m_1x_i - q_1 & d_i \le m_1x_i + q_1 - y_i & \text{per } i = 1, \dots, k \\ & d_i \ge y_i - m_2x_i - q_2 & d_i \le m_2x_i + q_2 - y_i & \text{per } i = k+1, \dots, n \\ & y_0 = m_1x_0 + q_1 = m_2x_0 + q_2 & & \end{array}$$

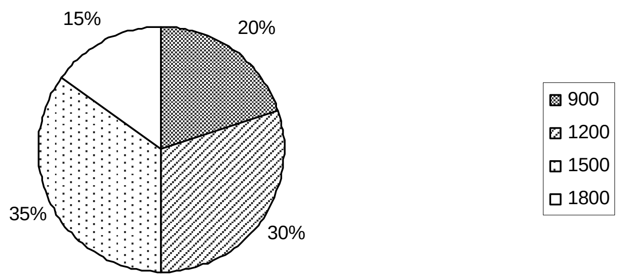
e riordinando le disequazioni

$$\begin{array}{llll} \min & d_1 + \dots + d_k + d_{k+1} + \dots d_n & & \\ & d_i + q_1 + x_i m_1 \ge y_i & d_i - q_1 - x_i m_1 \le -y_i & \text{per } i = 1, \dots, k \\ & d_i + q_2 + x_i m_2 \ge y_i & d_i - q_2 - x_i m_2 \le -y_i & \text{per } i = k+1, \dots, n \\ & x_0m_1 - x_0m_2 + q_1 - q_2 = 0 & & \end{array}$$

6. **Guerra commerciale I**

I clienti della SIP, noto operatore telefonico, pagano le telefonate 2 centesimi al minuto. Essi sono distribuiti in base al traffico mensile come descritto dal diagramma 1.

DIAGRAMMA 1
clienti per minuti di telefonate al mese



La NOP, operatore concorrente della SIP, intende lanciare una tariffa flat che invogli alcuni dei clienti SIP a cambiare operatore. Il diagramma 2 indica la percentuale di clienti disposta a cambiare operatore a fronte di una riduzione della propria bolletta.
Per contrastare la campagna della NOP, la SIP, che non è intenzionata a passare a una tariffa flat, ha tuttavia in mente di ridurre il costo per minuto del 20%. In base a questi dati, riempire le seguenti tabelle con il valore atteso

a) del ricavo della NOP
b) della percentuale di clienti SIP passati alla NOP

nei casi in cui la NOP proponga una tariffa flat di k = 12, 18, 22 euro e la SIP decida o no di ridurre la propria tariffa.

DIAGRAMMA 2
flusso potenziale di clienti verso NOP

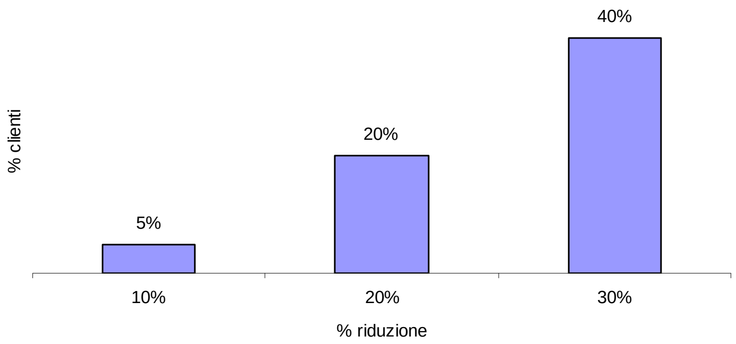


	Tabella A: ricavo di NOP			*Tabella B: % clienti passati a NOP*		
	flat 12	flat 18	flat 22	flat 12	flat 18	flat 22
SIP non riduce la tariffa	480	468	286	40	26	13
SIP riduce la tariffa del 20%	396	234	66	33	13	3

Dal diagramma 1 e dalle tariffe SIP ricaviamo la seguente tabella

minuti mensili	900	1200	1500	1800
% clienti	20	30	35	15
bolletta mensile a 2,0 cent/minuto	18,0	24,0	30,0	36,0
bolletta mensile a 1,6 cent/minuto	14,4	19,2	24,0	28,8

La percentuale di clienti sottratta a SIP dipende da quanto la tariffa flat è inferiore alla bolletta corrente, come risulta dal diagramma 2. Se SIP non cambia la propria tariffa, per ciascuna classe di clienti a seconda della tariffa flat offerta la percentuale che passa a NOP è riportata nella tabella che segue:

	minuti mensili				se SIP mantiene la propria tariffa	
	900	1200	1500	1800	clienti passati a NOP	ricavo NOP x 100 clienti oggetto di offerta
flat 12	40%	40%	40%	40%	**40%**	**480**
flat 18	0%	20%	40%	40%	**26%**	**468**
flat 22	0%	0%	20%	40%	**13%**	**286**

Le ultime due colonne riportano la percentuale di clienti passata a NOP, calcolata pesando le percentuali di ciascuna riga con il numero di clienti in ciascuna classe di minuti mensili (prima riga della tabella precedente), e il ricavo che NOP ottiene ogni 100 clienti a cui offre la tariffa, calcolato moltiplicando la percentuale della colonna precedente per la corrispondente tariffa flat. La tabella si può replicare nel caso in cui SIP muti la propria tariffa:

	minuti mensili				se SIP riduce la propria tariffa	
	900	1200	1500	1800	clienti passati a NOP	ricavo NOP x 100 clienti oggetto di offerta
flat 12	5%	40%	40%	40%	**33%**	**396**
flat 18	0%	0%	20%	40%	**13%**	**234**
flat 22	0%	0%	0%	20%	**3%**	**66**

Da queste ultime colonne si costruiscono le tabelle A e B.

7. Guerra commerciale II

Quali di quelle compilate costituisce la tabella di un gioco a somma zero?

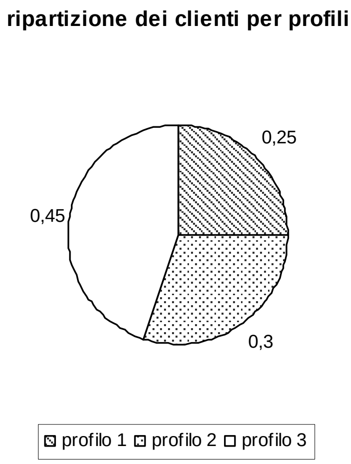
[A] la tabella A

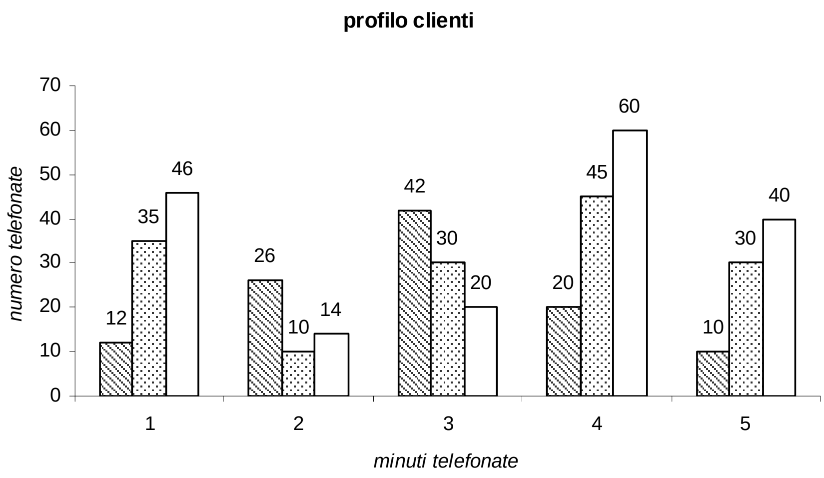
[B] la tabella B. Quello rappresentato dalla tabella A non è un gioco a somma zero, in quanto non tutto ciò che non viene acquisito da NOP si intende preso da SIP: infatti il valore complessivo del servizio offerto è oggetto non è indipendente dalle decisioni prese dai due avversari. Ad esempio, se NOP offre la flat a 12 euro e SIP mantiene la tariffa di 2 cent/minuto, su 100 clienti ai quali fa la sua offerta NOP ne convince 40 (uniformemente per classe di minuti/mese) e ricava 480 euro; sui rimanenti 60 SIP ricava $0{,}02 \cdot (900 \cdot 20 + 1200 \cdot 30 + 1500 \cdot 35 + 1800 \cdot 15) \cdot 60\% = 1602$ euro. In questo caso il valore del servizio è quindi $480 + 1602 = 2082$. Se invece SIP decidesse di ridurre la propria tariffa, NOP riuscirebbe a ricavare 468 euro sottraendo 0 clienti da 900 minuti/mese, 6 da 1200, 14 da 1500 e 6 da 1800; a SIP resterebbero quindi tutti e 20 i clienti da 900 minuti/mese, 24 clienti da 1200, 21 clienti da 1500 e 9 clienti da 1800, per un ricavo totale di $0{,}16 \cdot (900 \cdot 20 + 1200 \cdot 24 + 1500 \cdot 21 + 1800 \cdot 9) = 1512$ euro. In questo caso il valore del servizio sarebbe perciò $468 + 1512 = 1980$ euro.

[C] entrambe

8. Life is now

I clienti tipo dell'operatore telefonico *Aquafone* sono divisi in tre gruppi: il primo, che vale il 25% della torta, effettua mediamente 110 chiamate mensili distribuite secondo il profilo 1; il secondo, pari al 30%, ne effettua mediamente 150 distribuite secondo il profilo 2; il terzo infine ne effettua in media 180 in accordo al profilo 3. Per ciascuna tipologia di cliente il grafico dei profili riporta come sono distribuite le telefonate in relazione alla loro durata (si suppone che non vi siano mai chiamate di durata superiore a 5 minuti).





Aquafone vuole sostituire l'attuale piano tariffario con uno nel quale ogni conversazione costi x_1 euro di scatto alla risposta e x_2 euro al minuto, ma per evitare di perdere clienti, si impone di scegliere tali valori in modo da contenere la bolletta del generico cliente entro i 100€ mensili, qualunque sia il suo profilo. Formulare come programmazione lineare il problema di massimizzare il ricavo mensile dell'operatore e risolverlo con il metodo del simplesso riportando di seguito i valori ottimi.

$x_1^* = 0{,}555$ $\qquad$ $x_2^* = 0$ $\qquad$ $R(x_1^*, x_2^*) = 8527{,}8$

Con i dati desunti dal grafico dei profili cliente si può calcolare il numero di chiamate effettuate da 100 clienti, ripartiti per profilo e in totale, e la loro durata complessiva.

Dati per 100 clienti	profilo 1	profilo 2	profilo 3	**totale**
chiamate	2.750	4.500	8.100	**15.350**
minuti	8.000	14.250	25.830	**48.080**
clienti per profilo	25	30	45	**100**

Il ricavo conseguito da *Aquafone* ogni 100 clienti sarà dato dalla somma di due termini: il primo proporzionale secondo x_1 al numero totale di chiamate, il secondo proporzionale secondo x_2 al numero totale di minuti. L'obiettivo quindi sarà

$$\max \quad 15350x_1 + 48080x_2$$

Ovviamente le due variabili sono non negative:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Vincolare la bolletta di ogni cliente a non superare i 100€ mensili richiede poi che il ricavo complessivo di *Aquafone* ottenuto dai clienti del profilo k non superi $100n_k$, dove n_k è il numero di clienti (su 100) del profilo k:

$$\begin{array}{lcl c lcl}
2750x_1 + 8000x_2 & \leq & 25\cdot100 & & 110x_1 + 320x_2 & \leq & 100 \\
4500x_1 + 14250x_2 & \leq & 30\cdot100 & \text{cioè} & 150x_1 + 475x_2 & \leq & 100 \\
8100x_1 + 25830x_2 & \leq & 45\cdot100 & & 180x_1 + 574x_2 & \leq & 100
\end{array}$$

Risolvendo il problema con il metodo del simplesso si ottiene rapidamente la soluzione ottima $x_1^* = 5/9 = 0{,}555$€, $x_2^* = 0$.