RICERCA OPERATIVA **GRUPPO B**
prova scritta del 15 febbraio 2007

Rispondere alle seguenti domande marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate). Una risposta esatta vale 2 punti, una sbagliata vale –1 punto.

1. Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Come è noto, un tale grafo ammette sempre un numero pari, sia $2k$, di vertici di grado dispari. Allora in generale gli archi di G possono essere partizionati in

(A) k cicli dispari
(B) k passeggiate
(C) k cicli

Giustificare la risposta.
Collegando in modo arbitrario a due a due i $2k$ nodi di G aventi grado dispari con k archi si ottiene un grafo i cui nodi hanno tutti grado pari. Tale grafo è euleriano, ed ammette quindi una passeggiata che tocca ogni arco una e una sola volta. Eliminando i k archi aggiunti si ottengono k passeggiate disgiunte che ricoprono gli archi di G.

2. I vettori (2, 0, –2), (–3, 2, 0), (1, 0, –2) sono

(A) affinemente dipendenti
(B) linearmente dipendenti
(C) affinemente indipendenti

Infatti applicando la definizione di dipendenza lineare si vede subito che il sistema omogeneo

$$\begin{aligned} 2l_1 - 3_2 + l_3 &= 0 \\ 2l_2 &= 0 \\ -2l_1 \quad - 2l_3 &= 0 \end{aligned}$$

avendo determinante dei coefficienti pari a 12 ammette la sola soluzione banale $l_1 = l_2 = l_3 = 0$. Quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti, e non possono che essere anche affinemente indipendenti.

Risolvere i seguenti esercizi. La soluzione viene valutata fino a 5 punti.

4. Production management

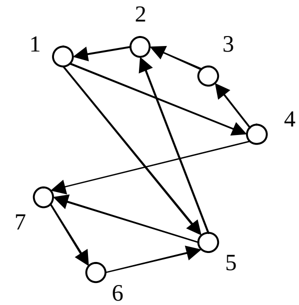
Una fabbrica produce m composti ottenuti trattando n prodotti diversi. Sia a_{ij} il quantitativo di composto i ottenuto trattando *una unità* di prodotto j. Il manager deve decidere se avviare procedure di acquisto/vendita di alcuni prodotti, tenendo presente che, acquistato/venduto in quantità l_j, il prodotto j fornisce/sottrae al magazzino di uscita della fabbrica $a_{ij}l_j$ unità di composto i. Ogni procedura di acquisto o vendita comporta un costo fisso c. Si vuole minimizzare il costo fisso complessivo delle procedure attivate in modo da portare il magazzino dall'attuale quantitativo b_i' di composto i a un nuovo, prefissato quantitativo b_i''. Posto $b_i = b_i'' - b_i'$, formulare il problema in termini di ottimizzazione combinatoria, e dire se è possibile risolverlo in generale con il metodo greedy. Se sì, dire perché; se no, fornire un esempio.

Sia $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ la matrice che raccoglie gli n vettori colonna corrispondenti ai prodotti. Inizialmente il magazzino contiene una quantità di composti rappresentata da un vettore $\mathbf{b}' \in \mathrm{IR}^m$. Dopo aver acquistato/venduto l_j unità di prodotto j, il magazzino sarà passato a $\mathbf{b}'' = \mathbf{b}' + \mathbf{A}l$. Il problema consiste quindi nello scegliere un minimo numero di prodotti j ai quali attribuire $l_j \neq 0$ in modo da risolvere il sistema $\mathbf{A}l = \mathbf{b}$. Ciò è possibile se le colonne corrispondenti a questi prodotti sono una base per $\mathbf{b}$. L'insieme universo U è formato quindi dalle colonne di $\mathbf{A}$, la famiglia $\Im$ dai sottoinsiemi di colonne che sono basi per $\mathbf{b}$, e la funzione peso è identicamente pari a 1. Poiché $(U, \Im)$ è un matroide vettoriale, il metodo greedy fornisce una soluzione ottima al problema considerato.

5. **Per gli appassionati di ciclismo**

Formulare il problema trovare nel grafo di figura un insieme di cicli a due a due disgiunti che abbia peso massimo, dove il peso dell'arco ij è fornito dalla seguente tabella. Quali vincoli occorre aggiungere per garantire che la soluzione ottima sia massimale? Quale soluzione ottima si otterrebbe con questa formulazione se invece di massimizzare si minimizzasse?

	1	2	3	4	5	6	7
1	-	2			4		
2	2	-	6		3		
3		6	-	6			
4			6	-			2
5	4	3			-	1	
6					1	-	5
7				2		5	-



Indicando con x_{ij} una variabile binaria che assume valore 1 se e solo se l'arco ij appartiene all'insieme cercato, il problema si formula

$$\max \quad 4x_{15} + 2x_{21} + 6x_{32} + 6x_{43} + 2x_{47} + 3x_{52} + x_{65} + 5x_{76}$$

$$\begin{array}{ll}
x_{14} + x_{15} \leq 1 & x_{21} \leq 1 \\
x_{21} \leq 1 & x_{32} + x_{52} \leq 1 \\
x_{32} \leq 1 & x_{43} \leq 1 \\
x_{43} + x_{47} \leq 1 & x_{14} \leq 1 \\
x_{52} + x_{57} \leq 1 & x_{15} + x_{65} \leq 1 \\
x_{65} \leq 1 & x_{76} \leq 1 \\
x_{76} \leq 1 & x_{47} + x_{57} \leq 1 \\
x_{14} + x_{15} = x_{21} & \\
x_{21} = x_{32} + x_{52} & \\
x_{32} = x_{43} & \\
x_{43} + x_{47} = x_{14} & \\
x_{52} + x_{57} = x_{15} + x_{65} & \\
x_{65} = x_{76} & \\
x_{76} = x_{47} + x_{57} & \\
x_{ij} \in \{0, 1\} \text{ per ogni } ij \in E &
\end{array}$$

Le diseguaglianze di sinistra (di destra) richiedono che ogni nodo del grafo sia primo (secondo) estremo di non più di uno degli archi scelti. Un insieme di archi che costituisce una soluzione individua quindi un grafo in cui ogni nodo ha grado di ingresso e di uscita non superiore a 1. I vincoli di eguaglianza dicono invece che tutti i nodi devono avere lo stesso grado. Quindi ogni nodo del sottografo soluzione ha grado (di ingresso e uscita) 0 oppure 1, vale a dire è formato da un insieme di cicli disgiunti (più eventuali nodi isolati).

6. Platforming

Il problema di *platforming*, comune a molte industrie, consiste nel selezionare tra più tipi di componenti alternativi quelli che consentano di realizzare al meglio una determinata famiglia di prodotti. Presi in considerazione n tipi di componenti che possono essere utilizzati in m tipi di prodotti diversi, sia $a_{ij} = 1$ se il componente j può essere utilizzato nella realizzazione del prodotto i, e $a_{ij} = 0$ altrimenti. Si vuole selezionare un insieme costituito dal minimo numero di componenti sufficienti per realizzare tutti i prodotti. Formulare il problema come programmazione lineare a numeri interi. Far vedere che non è necessario richiedere che le variabili del problema siano ≤ 1. Associato poi un costo c_j a ciascun componente j, modificare la formulazione in modo da minimizzare il costo del componente più costoso tra quelli prescelti.

Il problema, noto come set covering, ammette la seguente formulazione

$$\begin{array}{ll}
\min & x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq 1 \\
& \ldots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq 1 \\
& x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq 0, \text{ intero}
\end{array}$$

Supponiamo che nella soluzione ottima sia $x_j* \geq 1$ per qualche j. Se fosse $x_j^* > 1$, allora per $a_{ij} = 1$ il vincolo $\boldsymbol{i}$-esimo sarebbe soddisfatto con il segno ">", mentre il valore di x_j^* non darebbe alcun contributo al soddisfacimento del vincolo per $a_{ij} = 0$. Pertanto ridurre x_j^* fino a farle assumere valore 1 non comprometterebbe il soddisfacimento dei vincoli, e però comporterebbe una riduzione del valore della funzione obiettivo, contraddicendo l'ipotesi che $\mathbf{x}^*$ sia ottima. Dunque all'ottimo $x_j^* \geq 1$ implica $x_j^* = 1$.
Per la modifica richiesta, il massimo costo c tra i componenti selezionati rispetta il vincolo $c \geq c_i x_i$ per ogni componente i. L'obiettivo del problema diventa in questo caso min c.