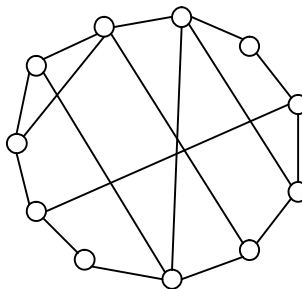


Rispondere alla seguente domanda marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate). La risposta esatta vale 3 punti, quella sbagliata vale -1 punto.

1. Un grafo non orientato $G = (V, E)$ si dice *hamiltoniano* se contiene un ciclo $H = (V, F)$, $F \subseteq E$, che tocca tutti i vertici (ciclo hamiltoniano); in altri termini, G è costituito da un ciclo hamiltoniano al quale sono aggiunti archi trasversali, detti *corde* (vedi figura).



D'altra parte un grafo G si dice *planare* se è possibile disegnarlo nel piano euclideo in modo che nessuna coppia di archi si intersechi in un punto: in tal caso si dice che G ammette un *disegno planare*. Dato ora un qualsiasi disegno di G con le corde interne al circuito hamiltoniano (tale disegno, come quello di figura, non è quindi necessariamente planare) si consideri il grafo $G' = (E - F, A)$, dove $ab \in A$ se e solo se gli archi a e b si intersecano in un punto. Allora G è planare se e solo se G'

- (A) è hamiltoniano
- (B) è planare
- (C) non contiene cicli dispari

G' non contiene cicli dispari se e solo se è bipartito, ed è bipartito se e solo $E - F$ può essere partizionato in due insiemi stabili S, T . Se ciò accade, le corde in S (le corde in T) non si intersecano tra di loro, e quindi possono essere disposte all'esterno (all'interno) del circuito hamiltoniano, ottenendo così un disegno planare. Viceversa supponiamo che G ammetta un disegno planare, e siano rispettivamente S e T gli insiemi di corde che in tale disegno giacciono all'esterno e all'interno del circuito hamiltoniano. Siccome il disegno è planare, le corde di S non si intersecano tra di loro, e tale proprietà evidentemente si conserva anche se si dispongono le corde di S tutte all'interno del circuito. D'altra parte, neppure le corde di T si intersecano tra di loro: dunque il grafo $G' = (S \cup T, A)$ è bipartito.

- (D) è privo di cicli

Rispondere alle seguenti domande marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate). Una risposta esatta vale 3 punti, una sbagliata vale -1 punto.

2. I vettori di $\mathbb{R}^3$ $(2, 0, \frac{1}{3})$, $(2, 2, 1)$ e $(0, 3, 1)$
- (A) sono linearmente ma non affinemente indipendenti
 - (B) sono affinemente ma non linearmente indipendenti. Infatti combinandoli con coefficienti 1, -1, $\frac{2}{3}$ si ottiene il vettore nullo: la somma dei coefficienti tuttavia è diversa da 0.
 - (C) non sono né affinemente né linearmente indipendenti

3. I vettori $\mathbf{b}_1 = (3, 1, 4)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 2, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 3, -1)$ formano una base per $\mathbb{R}^3$. Sostituendo $\mathbf{x} = (2, -2, 5)$ a
- (A) $\mathbf{b}_1$ oppure $\mathbf{b}_2$
 - (B) $\mathbf{b}_2$ oppure $\mathbf{b}_3$
 - (C) $\mathbf{b}_1$ oppure $\mathbf{b}_3$
- si ottiene ancora una base per $\mathbb{R}^3$.

Infatti $\mathbf{x}$ si esprime come combinazione lineare di $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$, ma il coefficiente di $\mathbf{b}_2$ è 0. Quindi per il teorema di sostituzione $\mathbf{x}$ non può sostituire $\mathbf{b}_2$ in una base di $\mathbb{R}^3$.

Risolvere il seguente esercizio. La soluzione viene valutata fino a 6 punti.

4. La COOP sei tu

Una grande società di distribuzione di generi alimentari vuole inaugurare m supermercati in altrettante città di una determinata regione, e deve predisporre il supporto logistico aprendo contemporaneamente p magazzini intermedi di smistamento. Dopo un'accurata analisi sono state selezionate $n > p$ località candidate per l'apertura di questi magazzini. Sia d_{ij} la distanza della località i dalla città j sede di un supermercato. Evidentemente, il generico supermercato si rifornirà dal magazzino più vicino tra tutti quelli aperti. Si vuole allora scegliere le p località dove aprire i magazzini in modo da minimizzare la distanza che separa la coppia supermercato-magazzino più lontana. Formulare il problema come programmazione lineare 0-1 (suggerimento: si usino variabili di scelta della località e di assegnamento del supermercato alla località).

Il problema, noto come p -centro, può essere formulato associando

- a ciascuna località i una variabile $x_i \in \{0, 1\}$, che assume valore 1 se e solo se la località viene scelta come sede di un magazzino intermedio
- a ciascuna coppia (i, j) di località-supermercato una variabile $x_{ij} \in \{0, 1\}$, che assume valore 1 se e solo se $x_i = 1$ e il magazzino posto in i serve il supermercato posto in j .

Per come sono definite le x_{ij} , deve ovviamente valere il vincolo

$$x_{ij} \leq x_i \quad \text{per ogni località } i \text{ e supermercato } j$$

Poiché ciascun supermercato si rifornisce da un solo magazzino, deve poi aversi

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad \text{per ogni supermercato } j$$

La distanza del supermercato j dal magazzino prescelto per il rifornimento è data da

$$d_j = \sum_i d_{ij} x_{ij} \quad \text{per ogni supermercato } j$$

e la distanza massima dei supermercati dai magazzini prescelti verifica

$$d \geq d_j \quad \text{per ogni supermercato } j$$

Il problema si scrive quindi

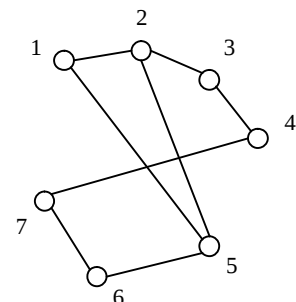
$$\begin{aligned} \min \quad & d \\ & d \geq \sum_i d_{ij} x_{ij} \quad \forall j \\ & \sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j \\ & x_{ij} \leq x_i \quad \forall i, j \\ & x_i, x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \end{aligned}$$

Risolvere il seguente esercizio. La soluzione viene valutata fino a 5 punti.

5. La coperta di Linus

Formulare il problema di coprire i vertici del grafo di figura con un insieme di archi che abbia peso minimo, dove il peso dell'arco ij è fornito dalla seguente tabella. Quale soluzione ottima si otterrebbe con questa formulazione se invece di minimizzare si massimizzasse? Quali vincoli occorre aggiungere per garantire che la soluzione ottima sia minimale?

	1	2	3	4	5	6	7
1	-	2					
2	2	-	6		3		
3		6	-	6			
4			6	-			2
5	4	3			-	1	
6					1	-	5
7				2		5	-



Detta x_{ij} una variabile binaria pari a 1 se e solo se l'arco ij appartiene all'insieme prescelto, il problema si formula

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 2x_{12} + 4x_{15} + 6x_{23} + 3x_{25} + 6x_{34} + 2x_{47} + x_{56} + 5x_{67} \\
 & x_{12} + x_{15} \geq 1 \\
 & x_{12} + x_{23} + x_{25} \geq 1 \\
 & x_{23} + x_{34} \geq 1 \\
 & x_{34} + x_{47} \geq 1 \\
 & x_{15} + x_{25} + x_{56} \geq 1 \\
 & x_{56} + x_{67} \geq 1 \\
 & x_{47} + x_{67} \geq 1 \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\} \text{ per ogni } ij \in E
 \end{aligned}$$

Se invece di minimizzare si volesse massimizzare si otterrebbe banalmente una soluzione identicamente pari a 1, corrispondente all'intero insieme E . Per garantire che la soluzione ottima del problema sia minimale non occorre aggiungere vincoli. Infatti i pesi degli archi sono positivi: se perciò la soluzione ottima fosse non minimale sarebbe possibile ridurne il peso eliminando uno dei suoi archi.