RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**

prova scritta del 21 dicembre 2006

Cognome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

Nome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

Matricola: |__|__|__|__|__|__|

Risolvere il seguente problema. La soluzione viene valutata fino a 4 punti.

1. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare, esibendo il valore della soluzione ottima (e delle variabili) qualora esista, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato.

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ & 2x_2 - 3x_3 \geq 2 \\ & x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3 \end{array}$$

Soluzione:

x_1	x_2	x_3	z	$\geq$
–3	–2	0	1	0
1	1	–1	0	1
0	2	–3	0	2
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\geq$
–3	–2	0	1	0
1	1	0	0	1
0	2	0	0	2
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\geq$
0	1	0	1	3
0	2	0	0	2
0	–2	0	1	0
0	0	0	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\geq$
0	0	0	3	6
0	0	0	1	2
0	0	0	1	0

Il valore minimo di z è 2. Le variabili assumono i seguenti valori: $x_1 = x_3 = 0$ e $x_2 = 2$.

Rispondere alle seguenti domande marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate).
Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata vale –1 punto.

2. Il vettore (1, 1, 1) è combinazione
[A] affine
[B] convessa
[C] lineare ma non affine
dei vettori (2, 1, 1), (1, 2, 1) e (1, 1, 2).

La combinazione $\lambda_1 (2, 1, 1)^T + \lambda_2 (1, 2, 1)^T + \lambda_3 (1, 1, 2)^T = (1, 1, 1)^T$ fornisce il sistema

$$\begin{array}{l} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \end{array}$$

dal quale si ricava $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/4$. Poiché $\lambda_i \geq 0$, $i = 1,2,3$, la combinazione è conica, dunque certamente lineare ma non affine.

3. Scrivere il duale del problema

$$\begin{array}{lll} \min & 3x_1 + 7x_2 - x_3 & \\ & x_2 & \leq 2 \\ & x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 & \geq -1 \\ & 3x_3 + x_4 & = -3 \\ & 2x_2 + x_3 & = 1 \\ & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

$$
\begin{array}{llcl}
\max & -2y_1 - y_2 - 3y_3 + y_4 & & \\
 & y_2 & = & 3 \\
 & -y_1 - 2y_2 + 2y_4 & \leq & 7 \\
 & 4y_2 + 3y_3 + y_4 & = & -1 \\
 & -y_2 + y_3 & = & 0 \\
 & y_1, y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Risolvere il seguente esercizio. La soluzione viene valutata fino a 5 punti.

4. Un aiuto per Babbo Natale

Babbo Natale deve organizzare il suo giro di consegne annuale. Le renne sono stanche, ma bisogna portare regali a un insieme N di bambini partendo dal Polo e tornandoci nel minor tempo possibile. Conoscendo la distanza d_{ij} che separa il bambino i dal bambino j ($i, j \in N$), aiutate il povero vecchietto a fare prima possibile formulando per lui un problema di ottimizzazione combinatoria, specificando l'insieme universo, la famiglia dei sottoinsiemi ammissibili e la funzione peso. Dite inoltre se per ogni funzione peso è sempre possibile risolvere un problema del genere con l'algoritmo greedy, e in caso contrario trovate un controesempio.

Babbo Natale forse non lo sa, ma deve risolvere un TSP. Questo problema ha come insieme universo la classe di tutte le possibili coppie di bambini:

$$U = N \times N$$

Una soluzione ammissibile consiste in un insieme di coppie che formano un circuito hamiltoniano sul grafo completo $G = (N, U)$, perciò:

$$\Im = \{X \subseteq U: X \text{ circuito hamiltoniano di } G\}$$

Il costo di una soluzione corrisponde alla somma delle distanze associate alle coppie che la formano:

$$c(X) = \textstyle\sum_{ij \in X} d_{ij}$$

L'algoritmo greedy purtroppo non può esserci utile: applicato al caso in esame fornirebbe infatti un albero ricoprente (e non un circuito hamiltoniano) di peso minimo.

Risolvere i seguenti esercizi. La soluzione viene valutata fino a 7 punti.

5. Ottimo Natale

Per far fronte all'offensiva pubblicitaria della sua massima concorrente, la Pepsi Co. ha dato mandato ai propri Babbi Natale di concepire un pacchetto globale di regali che tenga conto delle preferenze dei consumatori. A tutti i consumatori di un insieme C viene inviata una medesima lista di doni D, e a ciascuno viene chiesto di restituirla specificando una classifica che rispetti le proprie preferenze: ognuno si vedrà quindi recapitare sotto l'albero il dono che preferisce (uno solo), purché inserito da Babbo Natale nel pacchetto regali globale. Secondo le disposizioni della Pepsi Co. il pacchetto globale deve contenere al massimo d doni; inoltre il costo complessivo dell'*Operazione Natale* – che somma il valore dei doni recapitati e il costo di consegna – deve essere minimizzato. Scriviamo $P(j, k, h)$ se il consumatore j preferisce il dono k al dono h. Siano inoltre c_k il valore del dono $k \in D$, e c_j il costo del recapito di un dono al consumatore $j \in C$. Si formuli il problema come programmazione lineare 0-1.

Sia $x_k \in \{0, 1\}$ una variabile booleana che vale 1 se e solo se il dono k è inserito nel pacchetto globale. Dovrà aversi anzitutto

$$\textstyle\sum_{k \in D} x_k \leq d$$

Sia inoltre $x_{jk} \in \{0, 1\}$ una variabile booleana che vale 1 se e solo se il consumatore j ottiene il dono k. Chiaramente ciò può accadere solo se il dono è inserito nel pacchetto globale, pertanto

$$x_{jk} \leq x_k \qquad \text{per ogni } j \in C, k \in D$$

Ma se il dono k è inserito nel pacchetto globale, il consumatore j non vorrà nessun dono h che ritiene peggiore di k, quindi

$$\sum_{h:P(j,h,k)} x_{jh} \leq 1 - x_k \qquad \text{per ogni } j \in C,\ k \in D$$

Infatti se $x_k = 1$ allora $x_{jh} = 0$ per ogni dono h che j ritiene peggiore di k.
Naturalmente i consumatori che sottoscrivono il Natale Pepsi avranno un dono ciascuno:

$$\sum_{k\in D} x_{jk} = 1 \qquad \text{per ogni } j \in C$$

Obiettivo della Pepsi Co. è minimizzare il costo complessivamente sostenuto per l'iniziativa:

$$\min \quad \sum_{k\in D} x_k + \sum_{k\in D} \sum_{j\in C} x_{jk}$$

6. Riciclaggio

Riutilizzando i regali recuperati dai bambini ricchi, Babbo Natale e i suoi aiutanti realizzano ogni anno dei regali per i bambini poveri. Quest'anno sono stati recuperati 12.600 orsacchiotti, 7.800 cani di pezza e 20.400 scimmiette. Sapendo che in media un peluche usato fornisce stoffa, imbottitura e occhi di vetro secondo la tabella seguente:

	stoffa (metri)	imbottitura (etti)	occhi di vetro (numero)
orsacchiotto	0,4	3	1,2
cane	0,2	4	2,1
scimmietta	0,3	5	1,8

(la riga relativa al cane non contiene errori: ogni tanto viene recuperato un cane a tre teste) mentre uno rigenerato richiede quanto espresso nella tabella qui sotto:

	stoffa (metri)	imbottitura (etti)	occhi di vetro (numero)
orsacchiotto	0,4	4,8	2
cane	0,6	5,2	2
scimmietta	0,5	5,0	2

dire come utilizzare il materiale in modo da massimizzare il numero di regali complessivo. Risolvere il problema con il metodo del simplesso indicando qui sotto la soluzione di base iniziale e quella ottima.

Stoffa disponibile	=	0,4x12.600	+ 0,2x7.800	+ 0,3x20.400	=	12.710
Imbottitura disponibile	=	3x12.600	+ 4x7.800	+ 5x20.400	=	171.000
Occhi disponibili	=	1,2x12.600	+ 2,1x7.800	+ 1,8x20400	=	68.220

Il problema si formula indicando con x_o, x_c e x_s il numero di orsacchiotti, cani e scimmiette di pezza che si produrranno. L'obiettivo è

$$\max \quad x_o + x_c + x_s$$

Ovviamente le tre variabili sono non negative:

$$x_o,\ x_c,\ x_s \geq 0$$

Inoltre il numero di peluche realizzati dipende da quanto ciascun tipo di pupazzo richiede in termini di stoffa, imbottitura e occhi di vetro:

consumo stoffa	=	$0{,}4x_o + 0{,}6x_c + 0{,}5x_s \leq$	12.710	=	disponibilità stoffa
consumo imbottitura	=	$4{,}8x_o + 5{,}2x_c + 5{,}0x_s \leq$	171.000	=	disponibilità imbottitura
consumo occhi	=	$x_o + x_c + x_s \leq$	34.110	=	disponibilità occhi

Risolvendo il problema con il metodo del simplesso si ottiene rapidamente la soluzione ottima $x_c^* = x_s^* = 0$, $x_o^* = 31.775$.