Cognome:
Nome:
Matricola:

Rispondere alla seguente domanda. La risposta viene valutata fino a 4 punti.

1. Medioevo

Re Artù è molto irritato: tutte le volte che invita a cena quegli n rozzi cavalieri della tavola rotonda c'è sempre qualcuno che attacca briga col proprio vicino, e la cena si trasforma in rissa. Per cercare di risolvere il problema si rivolge a Mago Merlino chiedendogli di trovare, se esiste, una disposizione intorno al tavolo che impedisca a coppie di cavalieri con qualche conto in sospeso di trovarsi seduti fianco a fianco. Merlino risponde: "Sire, è un problema combinatorio: si tratta di capire se il grafo $G = (V, E)$ delle amicizie è **hamiltoniano**". Completate voi la frase. A partire dal grafo citato da Merlino, definite poi l'insieme universo U del problema e la classe $\mathfrak{S}$ di tutte le sue soluzioni ammissibili.

$$U = E$$

$$\mathfrak{S} = \{X \subseteq U: |X| = n, X \text{ forma un circuito hamiltoniano}\}$$

Rispondere alla seguente domanda marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate).

La risposta esatta vale 2 punti, la risposta sbagliata vale -1 punto.

2. Il vettore $(19/8, -1/4, 1/2)$ è combinazione

- [A] affine
- [B] conica
- [C] convessa

dei vettori $(4, -1, 2)$, $(2, 0, 3)$ e $(1, 0, -7)$.

3. Indicare le corrette coppie primale-duale

Primale	1) $\max 5x_1 + 5x_2 - x_3$ $2x_1 + 2x_3 = 2$ $-x_1 + 3x_2 \leq 3$ $-2x_1 + 5x_3 \geq 2$ $x_3 \geq 0$	2) $\max 5x_1 + 5x_2 - x_3$ $2x_1 + 2x_3 = 2$ $-x_1 + 3x_2 \leq 3$ $-2x_1 + 5x_3 \geq 2$ $x_1 \geq 0$	3) $\max 5x_1 + 5x_2 - x_3$ $2x_1 + 2x_3 = 2$ $-x_1 + 3x_2 \leq 3$ $-2x_1 + 5x_3 \geq 2$ $x_2 \geq 0$
Duale	A) $\max -3y_1 + 2y_2 - y_3$ $-y_1 + 2y_2 + y_3 = 5$ $3y_1 \geq 5$ $-5y_2 + y_3 = -1$ $y_1 \geq 0$ $y_2 \geq 0$	B) $\max -3y_1 + 2y_2 - 4y_3$ $-y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 5$ $3y_1 = 5$ $-5y_2 + 4y_3 = -1$ $y_1 \geq 0$ $y_2 \geq 0$	C) $\max -3y_1 + 2y_2 + y_3$ $-y_1 + 2y_2 - y_3 = 5$ $3y_1 = 5$ $-5y_2 - y_3 \geq -1$ $y_1 \geq 0$ $y_2 \geq 0$

Le coppie primale-duale corrette sono (3, A) (2, B) (1, C)

Risolvere i seguenti esercizi. Ogni soluzione viene valutata fino a 7 punti.

4. Assegn...amento

Una stamperia produce libretti di assegni per conto di diverse banche. Prima di iniziare il processo occorre preparare le matrici: ciascuna di esse consiste di una placca metallica rettangolare di dimensioni fissate, e può ospitare fino a 4 assegni (uguali o diversi tra loro). Ad esempio, avendo per clienti le banche A, B, C e D si può preparare una matrice per gli assegni A, B, B, C, un'altra per gli assegni C, C, C, D e una terza per gli assegni D, D. Se sono richiesti 40 assegni A, 70 assegni B, 70 assegni C e 50 assegni D, eseguendo 40 stampe con la prima matrice, 10 con la seconda e 20 con la terza si otterranno

40 assegni A, 80 assegni B, 70 assegni C e 50 assegni D rispettando la domanda con un surplus di 10 assegni B. Ogni matrice è lunga 28cm e realizzarla costa 100€. Gli assegni sono stampati usando un rotolo di carta che costa 10€ al metro, e ogni volta che si stampa una matrice si consuma una quantità di carta pari alla sua lunghezza, indipendentemente dal numero di assegni incisi. Si desidera ottimizzare il processo di stampa di (almeno) d_1 assegni di tipo 1, d_2 assegni di tipo 2, ..., d_n assegni di tipo n in modo da ridurre i costi il più possibile: formulare questo problema in termini di programmazione lineare intera.

Supponiamo in linea di principio di disporre di tutte le possibili matrici: siano esse m , e sia a_{ij} il numero di assegni di tipo i incisi sulla j -esima matrice. Sia allora y_j una variabile intera che indica quante volte la matrice j viene usata per stampare gli assegni che porta incisi. Perché y sia una soluzione ammissibile deve chiaramente aversi

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{im}y_m \geq d_i \quad (\text{soddisfacimento della domanda per ogni assegno } i)$$

Sia ora x_j una variabile a valori in $\{0, 1\}$ che assume valore 1 se e solo se la j -esima matrice viene utilizzata in stampa almeno una volta. Questa condizione è imposta dal vincolo:

$$u_j x_j \geq y_j \quad \text{per ogni matrice } j$$

dove $u_j = \max_i \{ \lceil d_i/a_{ij} \rceil : a_{ij} > 0 \}$ è un limite superiore al valore assunto da y_j (infatti con $y_j = u_j$ si soddisfa l'intera domanda di assegni stampabili con la matrice j). Tenendo conto dei costi della carta, della lunghezza delle matrici e del loro costo di realizzazione l'obiettivo del problema si scrive

$$\min \quad 100x_1 + 100x_2 + \dots + 100x_m + 2,8y_1 + 2,8y_2 + \dots + 2,8y_m$$

5. Un giorno in pretura

La gloriosa società Gioventù Torinese di Pallacorda ha liquidato la sua rosa di giocatori per imprevisti disguidi giudiziari. In vista del nuovo campionato dovrà tornare sul mercato per acquistare atleti di assoluto valore nei tre ruoli chiave del gioco: Dirigente, Designante, Arbitrante. Sia, pertanto, p_i la stima di efficacia di ogni atleta acquistato nel ruolo i e c_i il suo costo (in M€). Sapendo poi che, dalla vendita dei precedenti fuoriclasse la società ha accumulato un budget di Q M€ e tenendo conto che ulteriori introiti nella stagione corrente saranno preclusi data la retrocessione nell'Infimo Girone, si chiede di formulare il problema di massimizzare l'efficacia della prossima campagna acquisti restando nei limiti imposti dal budget.

Sia x_i (per $i = 1, 2, 3$) una variabile intera non negativa il cui valore indica il numero di atleti di ruolo i acquistati. Deve aversi

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \leq Q$$

L'obiettivo consiste nel massimizzare l'efficacia totale attesa della campagna acquisti, ossia:

$$\max \quad p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$$

6. Inconcepibile, incredibile, inattendibile, ... inammissibile

Senza ricorrere al metodo di Fourier-Motzkin, ma applicando il metodo del simplesso, verificare che il problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \\ & -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \leq -6 \\ & 3x_1 - 10x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 4 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_3 \leq 1 \\ & x_4 \leq 1 \end{aligned}$$

non ammette soluzione.

L'esercizio può essere risolto in due modi: o riportando il problema in forma standard tramite l'aggiunta di 6 variabili ausiliare e risolvendo il problema ausiliario per determinare un'eventuale base ammissibile (che non dovrebbe esserci), oppure, più rapidamente, verificando che il duale del problema è illimitato inferiormente. Il problema duale si scrive

$$\begin{aligned}
\min \quad & -6y_1 + 4y_2 + y_3 + 2y_4 + y_5 + y_6 \\
& -y_1 + 3y_2 + y_3 = 5 \\
& 2y_1 - 10y_2 + y_4 = 3 \\
& -2y_1 + 3y_2 + y_5 = 2 \\
& -2y_1 + y_2 + y_6 = 1 \\
& y_1, \dots, y_6 \geq 0
\end{aligned}$$

La sua forma standard fornisce immediatamente la soluzione di base ammissibile $y_1 = y_2 = 0, y_3 = 5, y_4 = 3, y_5 = 2, y_6 = 1$. La tabella canonica è

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
-5	17	0	0	0	0	-14
-1	3	1				5
2	-10		1			3
-2	3			1		2
-2	1				1	1

Eseguendo un'operazione di pivot sull'elemento in rosso si ottiene:

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
0	-8	0	5/2	0	0	-13/2
0	-2	1	1/2			13/2
1	-5		1/2			3/2
0	-7		1	1		5
0	-9		1		1	4

La colonna associata alla variabile y_2 non contiene elementi > 0 ed esibisce un costo ridotto negativo. Essa dunque rivela che il problema è limitato inferiormente.

7. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare, esibendo il valore della soluzione ottima, qualora esista, altrimenti classificando il problema come inammissibile o illimitato.

$$\begin{aligned}
\max \quad & 6x_1 - 4x_3 \\
& x_3 - x_2 \leq 7 \\
& 2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq -3 \\
& x_1, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	z	$\leq$
-6	0	4	1	0
0	-1	1	0	7
2	5	1	0	-3
-1	0	0	0	0
0	0	-1	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\leq$
2	0	6	0	32
-1	0	0	0	0
0	0	-1	0	0
-6	0	4	1	0

x_1	x_2	x_3	z	$\leq$
-6	0	0	1	0
2	0	0	0	32
-1	0	0	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\leq$
0	0	0	0	32
0	0	0	1	96

Pertanto $z^* = 96$ dato che il problema è di massimizzazione.