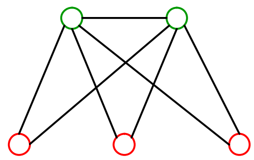
RICERCA OPERATIVA **GRUPPO B**
prova scritta del 12 luglio 2006 **FOGLIO 1**

Rispondere alle seguenti domande. Ogni soluzione viene valutata fino a 4 punti.

1. Sia $G = (V, E)$ un grafo simmetrico. Sia $\Im$ la famiglia degli insiemi $H \subseteq V$ che inducono su G un grafo bipartito. Dire se la coppia $(V, \Im)$ soddisfa la proprietà di subclusione e la proprietà di scambio. Motivare la risposta, e, in caso contrario, esibire un controesempio.



La coppia $(V, \Im)$ gode della proprietà di subclusione ma non della proprietà di scambio. Ad esempio, si consideri il grafo G indicato a fianco con i due sottografi indotti da V_1 e V_2. E' chiaro che aggiungendo a V_1 qualsiasi elemento di V_2 si ottiene un sottografo indotto che non è mai bipartito.

2. Sia dato il grafo $G = (V, E)$. Dire se vale la seguente affermazione:
G è bipartito $\Leftrightarrow$ esiste una partizione $\{V_1, V_2\}$ di V tale che la somma dei gradi dei nodi in V_1 è uguale alla somma dei gradi dei nodi in V_2 (cioè, $\sum_{v\in V1} \deg(v) = \sum_{v\in V2} \deg(v)$).
Motivare la risposta e, in caso contrario, trovare un controesempio.
Se G è bipartito, allora la proprietà è sicuramente verificata. Il viceversa non vale. Ad esempio, la clique con quattro nodi K_4 verifica la proprietà ma non è un grafo bipartito.

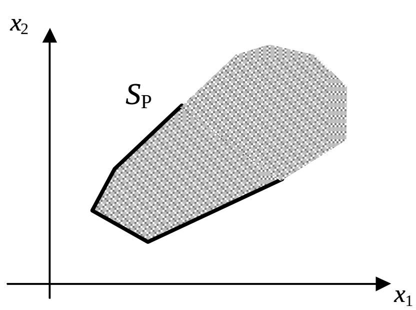
Rispondere alle seguenti domande marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate).
Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata vale –1 punto.

3. Il vettore (2, –2, 0) è combinazione
(A) affine ma non convessa
(B) conica
(C) convessa
dei vettori (3, –1, 0), (0, 0, 2) e (–1, –1, 2).
Risolvendo il sistema:
$2 = 3\lambda_1 + \quad - \lambda_3$
$-2 = -\lambda_1 \quad - \lambda_3$
$0 = \quad 2\lambda_2 + 2\lambda_3$
si ottengono i valori $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 1$ dai quali si conclude che la combinazione è affine ma non convessa.

4. Data la coppia primale-duale di problemi

(P) $\max \mathbf{cx}$
$\mathbf{x}\in S_P$, $\mathbf{x}\in \mathrm{IR}^2$

(D) $\min \mathbf{yb}$
$\mathbf{y}\in S_D$



dire quali delle seguenti affermazioni è vera
(A) (D) è inammissibile;
(B) (D) può ammettere soluzione ottima;
(C) (D) ammette sempre soluzione ottima.

Risolvere i seguenti esercizi. Ogni soluzione viene valutata fino a 7 punti.

5. Il problema:

$$
\text{(P)} \quad \max \mathbf{c}\mathbf{x} = 2x_1 - 4x_2 + 5x_4
$$
$$
\begin{array}{lll}
2x_1 + x_4 \qquad - x_5 & \leq & 3 \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 & = & 4 \\
- x_3 + \; x_4 & \geq & -1 \\
x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

ammette la soluzione $\mathbf{x}° = (2, 0, 0, -1, 0)$. Risolvendo per via grafica il duale di (P) dire se $\mathbf{x}°$ è ottima oppure no.

Il duale di (P) si scrive

$$
\text{(D)} \quad \min \; 3y_1 + 4y_2 + y_3
$$
$$
\begin{array}{lll}
y_1 + y_2 & \geq & 1 \\
y_2 & \leq & 4 \\
3y_2 + y_3 & \geq & 0 \\
y_1 - y_3 & = & 5 \\
y_1 + y_2 & = & 0 \\
y_1, y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Ma sostituendo $y_3 = y_1 - 5$ e $y_2 = -y_1$ si osserva immediatamente che il poliedro di (D) è vuoto. Le situazioni possibili sono quindi:

a) $P = \varnothing$

b) (P) illimitato

Siccome il problema primale ammette una soluzione, l'unico caso possibile è il (b), dunque (P) è illimitato e perciò $\mathbf{x}°$ non è una soluzione ottima.

6. Investment plan

Si vogliono investire 100€ in tre anni cercando di massimizzare il reddito conseguito. Si presentano le seguenti opzioni:

Anno	Tipologia	possibilità di rinnovo	rendita
I	Buoni del Tesoro	sì	5%
	Buoni Postali	sì	6%
II	Buoni del Tesoro	sì	6%
	Buoni Postali	no	5%
	Obbligazioni	sì	3%
III	Buoni del Tesoro		3%
	Obbligazioni		7%

dove per ciascuna tipologia si intende che, laddove si possa rinnovare l'investimento, questo deve avvenire per un ammontare non superiore alla parte investita in quella tipologia nell'anno precedente, più l'interesse conseguito. Ad esempio, se si decide di investire 50€ in Buoni Postali il primo anno, il secondo anno sarà possibile investire in Buoni Postali una cifra non superiore a 50 + 6%·50 = 53€, mentre il terzo anno non sarà possibile rinnovare ulteriormente l'investimento in Buoni Postali.

Indicando con $x_{ij} \geq 0$ la quantità di denaro investita nell'anno i sulla tipologia j (i = 1, 2, 3; j = T, P, O) si scrivano nella tabella seguente i coefficienti della funzione obiettivo (da massimizzare) e della matrice dei vincoli del problema di ottimizzazione risultante.

	x_{1T}	x_{1P}	x_{2T}	x_{2P}	x_{2O}	x_{3T}	x_{3O}	$=/\leq$	*termine noto*
funzione obiettivo				1,05		1,03	1,07		
vincoli	1	1						$=$	100
	–1,05		1					$\leq$	0
		–1,06		1				$\leq$	0
	–1,05	–1,06	1	1	1			$\leq$	0
			–1,06			1		$\leq$	0
					–1,03		1	$\leq$	0

Applicando la teoria della dualità si faccia successivamente vedere che il problema ottenuto eliminando le clausole $x_{ij} \geq 0$ non ha soluzione ottima.

Il problema si formula: $\max \quad 1{,}05\, x_{2P} + 1{,}03\, x_{3T} + 1{,}07\, x_{3O}$

$$
\begin{array}{lcll}
x_{1T} + x_{1P} & = & 100 & \\
x_{2T} & \leq & 1{,}05\, x_{1T} & \\
x_{2P} & \leq & 1{,}06\, x_{1P} & \\
x_{2O} & \leq & 1{,}05\, x_{1T} + 1{,}06\, x_{1P} - x_{2T} - x_{2P} & \\
x_{3T} & \leq & 1{,}06\, x_{2T} & \\
x_{3O} & \leq & 1{,}03\, x_{2O} & \\
x_{ij} & \geq & 0 & \text{per } i = 1, 2, 3;\ j = \text{T, P, O}
\end{array}
$$

da cui la tabella richiesta. Osserviamo che esso ammette la stessa soluzione ottima del problema rilassato

$$
\begin{array}{llcl}
\max & 1{,}05 x_{2P} + 1{,}03 x_{3T} + 1{,}07 x_{3O} & & \\
 & x_{1T} + x_{1P} & \leq & 100 \\
 & -1{,}05 x_{1T} + x_{2T} & \leq & 0 \\
 & -1{,}06 x_{1P} + x_{2P} & \leq & 0 \\
 & -1{,}05 x_{1T} - 1{,}06 x_{1P} + x_{2T} + x_{2P} + x_{2O} & \leq & 0 \\
 & -1{,}06 x_{2T} + x_{3T} & \leq & 0 \\
 & -1{,}03 x_{2O} + x_{3O} & \leq & 0 \\
 & x_{ij} & \geq & 0 \quad \forall i, j
\end{array}
$$

(soluzione che, tra parentesi, è $x_{1P}^* = 100$, $x_{2O}^* = 106$, $x_{3O}^* = 109{,}18$ e fornisce un capitale finale di 116,8226 €). Eliminando ora le clausole $x_{ij} \geq 0$ si ottiene un problema in forma generale. Il duale, in forma standard, si scrive:

$$
\begin{array}{llcl}
\min & 100 y_1 & & \\
 & y_1 - 1{,}05 y_2 - 1{,}05 y_4 & = & 0 \\
 & y_1 - 1{,}06 y_3 - 1{,}06 y_4 & = & 0 \\
 & y_2 + y_4 - 1{,}06 y_5 & = & 0 \\
 & y_3 + y_4 & = & 1{,}05 \\
 & y_4 - 1{,}03 y_6 & = & 0 \\
 & y_5 & = & 1{,}03 \\
 & y_6 & = & 1{,}07 \\
 & y_k & \geq & 0 \quad \text{per } k = 1, \ldots, 6
\end{array}
$$

Da qui si ricava in successione

$y_6 = 1{,}0700$

$y_5 = 1{,}0300$

$y_4 = 1{,}1021$

$y_3 = 1{,}0500 - 1{,}1021 < 0$, non ammissibile. Si può quindi concludere che il problema ottenuto eliminando le clausole di non negatività del primale è privo di soluzione ottima.