RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**

prova scritta del 12 luglio 2006

Rispondere alle seguenti domande. Ogni soluzione viene valutata fino a 4 punti.

1. Sia $G = (V, E)$ un grafo simmetrico. Sia $\Im$ la famiglia degli insiemi $P \subseteq V$ con $|P| \leq p$ tali che, per ogni vertice $v \in V - P$, esiste un vertice $u \in P$ adiacente a v. Dire se la coppia $(V, \Im)$ soddisfa la proprietà di subclusione e la proprietà di scambio. Motivare la risposta e, in caso contrario, esibire un controesempio.
La coppia $(V, \Im)$ soddisfa la proprietà di scambio ma non la proprietà di subclusione. Infatti, l'insieme vuoto non appartiene a $\Im$.

2. Sia dato il grafo $F = (V, E)$. Dire se vale la seguente affermazione:
F è una foresta $\Leftrightarrow$ F è 2-colorabile.
Motivare la risposta e, in caso contrario, trovare un controesempio.
Se F è una foresta, allora è un grafo bipartito e come tale è 2-colorabile.
Il viceversa non vale. Ad esempio, un ciclo con quattro nodi è 2-colorabile ma non è una foresta.

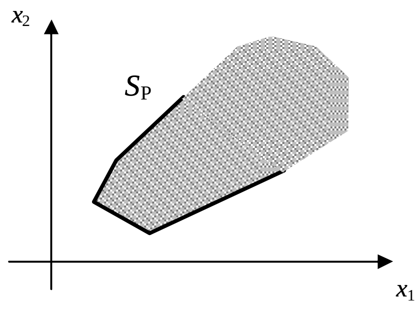
Rispondere alle seguenti domande marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate).
Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata vale –1 punto.

3. Il vettore (3, 3, 3) è combinazione
(A) affine
(B) conica
(C) convessa
dei vettori (1, 1, 0), (0, 2, 2) e (1, 1, 3).
Risolvendo il sistema:
$3 = \lambda_1 + \lambda_3$
$3 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3$
$3 = 2\lambda_2 + 3\lambda_3$
si ottengono i valori $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 1$ dai quali si conclude che la combinazione è conica.

4. Data la coppia primale-duale di problemi

(P) $\min \mathbf{cx}$, $\mathbf{x} \in S_P$, $\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^2$

(D) $\max \mathbf{yb}$, $\mathbf{y} \in S_D$



dire quali delle seguenti affermazioni è vera
(A) il problema (D) è illimitato superiormente;
(B) il problema (D) ammette sempre soluzione ottima;
(C) il problema (D) può ammettere soluzione ottima.

Risolvere i seguenti esercizi. Ogni soluzione viene valutata fino a 7 punti.

5. Il problema (P)

$$\begin{array}{lll} \max \mathbf{c}\mathbf{x} = 2x_1 - 4x_2 + 5x_4 & & \\ 2x_1 + x_4 & \le & 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 4 \\ -x_3 + x_4 & \ge & -1 \\ x_1, x_2, x_3 & \ge & 0 \end{array}$$

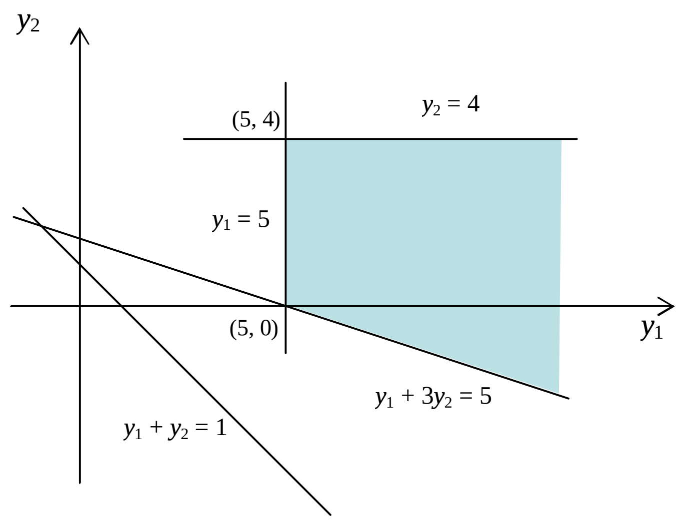
ammette la soluzione $\mathbf{x}° = (2, 0, 0, -1)$. Risolvendo per via grafica il duale di (P) dire se $\mathbf{x}°$ è ottima oppure no.

Il duale di (P) si scrive (D)

$$\begin{array}{lll} \min\ 3y_1 + 4y_2 + y_3 & & \\ 2y_1 + 2y_2 & \ge & 2 \\ y_2 & \le & 4 \\ 3y_2 + y_3 & \ge & 0 \\ y_1 - y_3 & = & 5 \\ y_1, y_3 & \ge & 0 \end{array}$$

cioè, sostituendo $y_3 = y_1 - 5$ e osservando che $y_3 \ge 0$ implica $y_1 \ge 5$:

$$\begin{array}{llll} \text{(D)} & \min & 4y_1 + 4y_2 - 5 & \\ & & y_1 + y_2 & \ge 1 \\ & & y_2 & \le 4 \\ & & y_1 + 3y_2 & \ge 5 \\ & & y_1 & \ge 5 \end{array}$$



Il poliedro di questo problema è rappresentato nella figura a lato. Si tratta di un poliedro illimitato; ma poiché il primale ammette soluzione, il duale non è illimitato, e una soluzione ottima si trova quindi su uno dei vertici $\mathbf{y}^1 = (5, 4)$, $\mathbf{y}^2 = (5, 0)$. Qui la funzione obiettivo vale rispettivamente $c_1 = 31$, $c_2 = 15$: dunque il punto $\mathbf{y}^2$ è ottimo. D'altronde si ha $\mathbf{c}\mathbf{x}° = -1$, e siccome $\mathbf{c}\mathbf{y}^2 = 15 > \mathbf{c}\mathbf{x}°$ si può dedurre che $\mathbf{x}°$ non è una soluzione ottima primale.

6. Investment plan

Si vogliono investire 100€ in tre anni cercando di massimizzare il reddito conseguito. Si presentano le seguenti opzioni:

Anno	Tipologia	possibilità di rinnovo	rendita
I	Buoni del Tesoro	sì	4%
	Buoni Postali	sì	5%
II	Buoni del Tesoro	sì	6%
	Buoni Postali	no	6%
	Obbligazioni	sì	2%
III	Buoni del Tesoro		5%
	Obbligazioni		3%

dove per ciascuna tipologia si intende che, laddove si possa rinnovare l'investimento, questo deve avvenire per un ammontare non superiore alla parte investita in quella tipologia nell'anno precedente, più l'interesse conseguito. Ad esempio, se si decide di investire 50€ in Buoni Postali il primo anno, il secondo anno sarà possibile investire in Buoni Postali una cifra non superiore a 50 + 5%·50 = 52,5€, mentre il terzo anno non sarà possibile rinnovare ulteriormente l'investimento in Buoni Postali.

Indicando con $x_{ij} \geq 0$ la quantità di denaro investita nell'anno i sulla tipologia j (i = 1, 2, 3; j = T, P, O) si scrivano nella tabella seguente i coefficienti della funzione obiettivo (da massimizzare) e della matrice dei vincoli del problema di ottimizzazione risultante.

	x_{1T}	x_{1P}	x_{2T}	x_{2P}	x_{2O}	x_{3T}	x_{3O}	=/≤	*termine noto*
funzione obiettivo				1,06		1,05	1,08		
vincoli	1	1						=	100
	–1,04		1					≤	0
		–1,05		1				≤	0
	–1,04	–1,05	1	1	1			≤	0
			–1,06			1		≤	0
					–1,02		1	≤	0

Applicando la teoria della dualità si faccia successivamente vedere che il problema ottenuto eliminando le clausole $x_{ij} \geq 0$ non ha soluzione ottima.

Il problema si formula max $1{,}06\,x_{2P} + 1{,}05\,x_{3T} + 1{,}03\,x_{3O}$

$$
\begin{array}{lcl}
x_{1T} + x_{1P} & = & 100 \\
x_{2T} & \leq & 1{,}04\,x_{1T} \\
x_{2P} & \leq & 1{,}05\,x_{1P} \\
x_{2O} & \leq & 1{,}04\,x_{1T} + 1{,}05\,x_{1P} - x_{2T} - x_{2P} \\
x_{3T} & \leq & 1{,}06\,x_{2T} \\
x_{3O} & \leq & 1{,}02\,x_{2O} \\
x_{ij} & \geq & 0 \qquad \text{per } i = 1, 2, 3;\ j = \text{T, P, O}
\end{array}
$$

da cui la tabella richiesta. Osserviamo che esso ammette la stessa soluzione ottima del problema rilassato

$$
\begin{array}{l}
\max \quad 1{,}06x_{2P} + 1{,}05x_{3T} + 1{,}03x_{3O} \\
\begin{array}{rcl}
x_{1T} + x_{1P} & \leq & 100 \\
-1{,}04x_{1T} + x_{2T} & \leq & 0 \\
-1{,}05x_{1P} + x_{2P} & \leq & 0 \\
-1{,}04x_{1T} - 1{,}05x_{1P} + x_{2T} + x_{2P} + x_{2O} & \leq & 0 \\
-1{,}06x_{2T} + x_{3T} & \leq & 0 \\
-1{,}02x_{2O} + x_{3O} & \leq & 0 \\
x_{ij} & \geq & 0 \quad \forall i, j
\end{array}
\end{array}
$$

(soluzione che, tra parentesi, è $x_{1T}^* = 100$, $x_{2T}^* = 104$, $x_{3T}^* = 110{,}24$ e fornisce un capitale finale di 115,7520 €). Eliminando ora le clausole $x_{ij} \geq 0$ si ottiene un problema in forma generale. Il duale, in forma standard, si scrive:

$$
\begin{array}{l}
\min \quad 100y_1 \\
\begin{array}{rcl}
y_1 - 1{,}04y_2 - 1{,}04y_4 & = & 0 \\
y_1 - 1{,}05y_3 - 1{,}05y_4 & = & 0 \\
y_2 + y_4 - 1{,}06y_5 & = & 0 \\
y_3 + y_4 & = & 1{,}06 \\
y_4 - 1{,}02y_6 & = & 0 \\
y_5 & = & 1{,}05 \\
y_6 & = & 1{,}03 \\
y_k & \geq & 0 \quad \text{per } k = 1, \ldots, 6
\end{array}
\end{array}
$$

Da qui si ricava a ritroso: $y_6 = 1{,}0300$; $y_5 = 1{,}0500$; $y_4 = 1{,}02y_6 = 1{,}0506$; $y_3 = 1{,}0600 - y_4 = 0{,}0094$; $y_2 = 1{,}06y_5 - y_4 = 0{,}0624$; $y_1 = 1{,}05(y_3 + y_4) = 1{,}1130$. Ma dalla prima equazione si ha anche $y_1 = 1{,}04\times(y_2 + y_4) = 1{,}04\times 1{,}1130$, quindi il sistema di equazioni del duale non è compatibile. Si può perciò concludere che il problema ottenuto eliminando le clausole di non negatività del primale è privo di soluzione ottima.