RICERCA OPERATIVA **GRUPPO B**

prova scritta del 22 marzo 2006

1. Dato un grafo bipartito simmetrico $G = (V, E)$, sia Q una data clique di G. In generale, la famiglia $\Im$ formata da tutti gli insiemi di archi $X \subseteq E$ che toccano almeno un elemento di Q

(A) gode della proprietà di scambio.

Q è chiaramente una coppia $\{u, v\}$ di vertici collegata da un arco di G, quindi $X = S' \cup S''$ è fatto da al più due stelle S', S'' di G con centro rispettivamente in u e v; se $Y = T' \cup T''$ è un'altra coppia di stelle con centri in u e v e $|Y| > |X|$, almeno una fra T' e T'' dovrà necessariamente contenere un arco y che non è in S' o in S''; ovviamente aggiungere y a X non viola la proprietà descrittiva di $\Im$.

(B) non gode della proprietà di scambio

(C) è subclusiva.

$\Im$ non è subclusiva in quanto $\varnothing \notin \Im$.

2. In un grafo simmetrico 3-regolare e connesso con almeno 5 vertici, una qualsiasi clique

(A) ha almeno 4 vertici

(B) non ha più di 3 vertici: una clique di $k \geq 4$ vertici richiede che ciascuno abbia grado $k - 1 \geq 3$; è quindi escluso che si possa avere $k > 4$, in quanto G è cubico; inoltre se si avesse $k = 4$, ciascuno dei quattro vertici della clique avrebbe grado 3, e quindi essa non potrebbe essere collegata a un quinto vertice di G.

(C) può avere 4 vertici

3. Il vettore $(^4/_5, {}^7/_5, {}^{16}/_5)$ è combinazione

(A) affine

No, in quanto $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = {}^8/_5 \neq 1$.

(B) conica

Dalla relazione $\lambda_1(1, 0, 2) + \lambda_2(1, 1, 2) + \lambda_3(0, 1, 2) = (^4/_5, {}^7/_5, {}^{16}/_5)$ si ottiene il sistema:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = {}^4/_5$$
$$\lambda_2 + \lambda_3 = {}^7/_5$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = {}^8/_5$$

da cui si ricavano i valori $\lambda_1 = {}^1/_5$, $\lambda_2 = {}^3/_5$ e $\lambda_3 = {}^4/_5$. Poiché $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$, la combinazione è conica.

(C) convessa

No, in quanto $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = {}^8/_5 \neq 1$.

dei vettori (1, 0, 2), (1, 1, 2) e (0, 1, 2).

4. Dati i seguenti problemi di Programmazione Lineare con $\mathbf{c} > \mathbf{0}$

$$\text{(P)} \quad \begin{array}{l} \max \mathbf{cx} \\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n \end{array} \qquad \text{(D)} \quad \begin{array}{l} \min \mathbf{yb} \\ \mathbf{yA} \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \in \mathrm{IR}^n \end{array}$$

dove con $\mathbf{u} = (1, 1, \ldots, 1)$ $\mathbf{x}°+\mu\mathbf{u}$ è una soluzione ammissibile di (P) per ogni $\mu>0$, dire quali delle seguenti affermazioni è vera :

(A) l'intersezione del poliedro definito dai vincoli di (P) e del poliedro definito dai vincoli di (D) ha un solo punto positivo in IR^n

(B) il problema duale (D) ammette ottimo finito

(C) il poliedro definito dai vincoli di (D) è vuoto.

Infatti il problema primale è illimitato: se così non fosse, dal momento che il poliedro di (P) è per ipotesi non vuoto, (P) ammetterebbe una soluzione ottima $\mathbf{x}^*$; ma scegliendo $\mu > (\mathbf{cx}^* - \mathbf{cx}°)/\mathbf{cu} \geq 0$ si otterrebbe $\mathbf{c}(\mathbf{x}°+\mu\mathbf{u}) > \mathbf{cx}^*$ (contraddizione).

5. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, si determini una soluzione ottima del problema

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & -3x_1 - 7x_2 \leq -2 \end{array}$$

Tabella iniziale

z	x_1	x_2	$\leq$
1	–2	–2	0
0	1	2	1
0	–3	–7	–2

Soluzione ottima: $(x_1^*, x_2^*) = (3, -1)$

6. Senza ricorrere al metodo del simplesso, dire se il problema:

$$\begin{array}{lll} (P) & \max & 2x_1 - 4x_2 + 5x_4 \\ & & 2x_1 + x_4 \leq 3 \\ & & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ & & -x_3 + x_4 \geq 4 \\ & & x_1, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

ammette soluzione e, in caso affermativo, calcolare il valore di una soluzione ottima ovvero concludere che il problema è illimitato superiormente (*suggerimento*: scrivere il duale di (P) e applicare il teorema fondamentale della PL).

Il duale di (P) si scrive

$$\begin{array}{lll} (D) & \min & 3y_1 + 4y_2 - 4y_3 \\ & & 2y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ & & y_2 = 4 \\ & & 3y_2 + y_3 \geq 0 \\ & & y_1 - y_3 \geq 5 \\ & & y_1, y_3 \geq 0 \end{array} \quad \text{cioè} \quad \begin{array}{ll} \min & 3y_1 - 4y_3 + 16 \\ & y_1 \geq -3 \\ & y_2 = 4 \\ & y_3 \geq -12 \\ & y_1 - y_3 \geq 5 \\ & y_1, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Il primo e il terzo vincolo duale sono dominati dalle clausole di non negatività. Pertanto il problema si può riscrivere

$$\begin{array}{lll} (D) & \min & 3y_1 - 4y_3 + 16 \\ & & y_1 - y_3 \geq 5 \\ & & y_1, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Il poliedro D di questo problema è chiaramente non vuoto. Il suo cono di recessione è il sottoinsieme dei punti di IR^2 che soddisfano contemporaneamente $y_1 \geq 0$, $y_1 \geq y_3$. Il vettore $\mathbf{y} = (1, 1) \in \mathrm{rec}(D)$ verifica $\mathbf{yb} = 3y_1 - 4y_2 = -1 < 0$: quindi per il teorema fondamentale della PL il problema (D) è illimitato inferiormente. Se ne deduce che (P) non ammette soluzione.

7. Uno zuccherificio del centro Italia è capace di estrarre zucchero dalle barbabietole con tre procedimenti differenti P_1, P_2 e P_3 ognuno dei quali necessita di due fasi di lavorazione su due differenti macchine M_1 e M_2. Nella Tabella 1 sono riportate le ore di utilizzo delle due macchine per la produzione di uno stock di confezioni di zucchero:

	P_1	P_2	P_3
M_1	1	2	1
M_2	2	1	1

Tabella 1

	P_1	P_2	P_3
Profitto	10	15	5

Tabella 2

Ogni macchina è disponibile per 30 ore. Il profitto per la vendita all'ingrosso di un sacchetto di zucchero da 1 Kg dipende dal procedimento usato ed è riportato nella Tabella 2 (in euro):
La macchina M_2 è molto vecchia e deve essere sostituita al più presto poiché c'è il rischio di un'imminente rottura che bloccherebbe l'intera produzione. Si formuli il problema di determinare il numero di sacchetti di zucchero che possono essere prodotti cercando di utilizzare il meno possibile la

macchina M_2 ma mantenendo il profitto almeno pari a 100 euro, e lo si risolva con il metodo del simplesso.

Definite le variabili:

x_1 = numero di stock prodotti con la procedura P_1
x_2 = numero di stock prodotti con la procedura P_2
x_3 = numero di stock prodotti con la procedura P_3

il problema può essere formulato come segue:

min	$2x_1 + x_2 + x_3$	ore di utilizzo di M_2
	$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30$	disponibilità di M_1
	$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 30$	disponibilità di M_2
	$10x_1 + 15x_2 + 5x_3 \geq 100$	limite minimo di profitto totale
	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	

Riscriviamo il problema in forma standard:

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + z_1 = 30 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + z_2 = 30 \\ & 10x_1 + 15x_2 + 5x_3 - z_3 = 100 \\ & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{array}$$

La tabella iniziale del simplesso è la seguente:

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
2	1	1	0	0	0	
1	2	1	1	0	0	30
2	1	1	0	1	0	30
10	15	5	0	0	–1	100

Non disponendo di una base, risolviamo il problema ausiliario. Le tabelle iniziale e finale associate al problema ausiliario sono le seguenti:

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	z	
0	0	0	0	0	0	1	
1	2	1	1	0	0	0	30
2	1	1	0	1	0	0	30
10	15	5	0	0	–1	1	100

0	0	0	0	0	0	1	0
$-1/3$	0	$1/3$	1	0	$2/15$	$-2/15$	$50/3$
$4/3$	0	$2/3$	0	1	$1/15$	$-1/15$	$70/3$
$2/3$	1	$1/3$	0	0	$-1/15$	$1/15$	$20/3$

Tornando ora ad applicare il simplesso al problema iniziale si ottiene la tabella iniziale:

2	1	1	0	0	0	0
$-1/3$	0	$1/3$	1	0	$2/15$	$50/3$
$4/3$	0	$2/3$	0	1	$1/15$	$70/3$
$2/3$	1	$1/3$	0	0	$-1/15$	$20/3$

e di qui la tabella ottima:

$4/3$	0	$2/3$	0	0	$1/15$	$-20/3$
$-1/3$	0	$1/3$	1	0	$2/15$	$50/3$
$4/3$	0	$2/3$	0	1	$1/15$	$70/3$
$2/3$	1	$1/3$	0	0	$-1/15$	$20/3$

da cui si ricava la soluzione ottima $x_1^* = 0$, $x_2^* = 20/3$, $x_3^* = 0$.