RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**

prova scritta del 22 marzo 2006

1. Dato un grafo simmetrico $G = (V, E)$, sia Q una data clique di G. In generale, la famiglia $\Im$ formata da tutti gli insiemi stabili $X \subseteq V$ che hanno intersezione non vuota con Q

(A) gode della proprietà di scambio

(B) non gode della proprietà di scambio.

Nel grafo P_3 (un percorso con 3 vertici e due archi) sia Q costituita da uno dei due estremi, u, e dal vertice centrale, v, di P_3; siano poi $X = \{v\}$, $Y = \{u, w\}$, dove w è il secondo estremo di P_3; chiaramente né u né w aggiunti a X formano un insieme stabile.

(C) è subclusiva.

No, in quanto un sottoinsieme di X potrebbe non contenere un elemento di Q.

2. In un grafo simmetrico 3-regolare dotato di almeno 3 vertici, una qualsiasi clique

(A) ha almeno 4 vertici

(B) non ha più di 3 vertici.

Invece può averne: K_4 è 3-regolare.

(C) non ha più di 4 vertici.

Infatti una clique con più di 4 vertici richiede che i nodi che la compongono abbiano grado maggiore di 3.

3. Il vettore (3, 1, 2) è combinazione

(A) affine.

Dalla condizione $\lambda_1(1, 0, 2) + \lambda_2(1, 1, 2) + \lambda_3(0, 1, 2) = (3, 1, 2)$ si ottiene il sistema:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 3$$
$$\lambda_2 + \lambda_3 = 1$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

dal quale si ricava $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$. Poiché $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, la combinazione è affine.

(B) convessa.

Avendosi $\lambda_3 = -2 < 0$, la combinazione non è evidentemente convessa.

(C) lineare ma non affine

dei vettori (1, 0, 2), (1, 1, 2) e (0, 1, 2).

4. Dati i seguenti problemi di programmazione lineare con $\mathbf{c} > \mathbf{0}$

$$(P)\quad \begin{array}{l} \min\ \mathbf{cx} \\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n \end{array} \qquad\qquad (D)\quad \begin{array}{l} \max\ \mathbf{yb} \\ \mathbf{yA} = \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \in \mathrm{IR}^n \end{array}$$

dove, con $\mathbf{u} = (1, 1, \ldots, 1)$, $\mathbf{x}°+\mu\mathbf{u}$ è una soluzione ammissibile di (P) per ogni $\mu<0$, dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

(A) il poliedro definito dai vincoli di (D) è vuoto.

Infatti il problema primale è illimitato. Se così non fosse, esisterebbe $\mathbf{x}^*$ ottima (il poliedro di (P) è per ipotesi non vuoto). Ma scegliendo opportunamente $\mu < (\mathbf{cx}^* - \mathbf{cx}°)/\mathbf{cu} \leq 0$, cioè $\mu\mathbf{cu} < \mathbf{cx}^* - \mathbf{cx}°$ si ha $\mathbf{c}(\mathbf{x}°+\mu\mathbf{u}) = \mathbf{cx}° - \mu\mathbf{cu} < \mathbf{cx}^*$ (contraddizione).

(B) il problema duale (D) ammette ottimo finito;

(C) l'intersezione del poliedro definito dai vincoli di (P) e del poliedro definito dai vincoli di (D) ha un solo punto in IR^n.

5. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, si determini una soluzione ottima del problema

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & 2x_1 - x_2 \leq -1 \end{array}$$

Tabella iniziale

z	x_1	x_2	$\geq$
1	–1	–2	0
0	1	1	2
0	–2	1	1

Soluzione ottima: $(x_1^*, x_2^*) = (^1/_3, ^5/_3)$

6. Senza ricorrere al metodo del simplesso, dire se il problema:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \max & 2x_1 - 4x_2 + 5x_4 \\
& & 2x_1 + x_4 \leq 3 \\
& & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\
& & -x_3 + x_4 \geq -1 \\
& & x_1, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

ammette soluzione e, in caso affermativo, calcolare il valore di una soluzione ottima ovvero concludere che il problema è illimitato superiormente (*suggerimento*: scrivere il duale di (P) e applicare il teorema fondamentale della PL).

Il duale di (P) si scrive

$$
\begin{array}{lll}
\text{(D)} & \min & 3y_1 + 4y_2 + y_3 \\
& & 2y_1 + 2y_2 \geq 2 \\
& & y_2 = 4 \\
& & 3y_2 + y_3 \geq 0 \\
& & y_1 - y_3 \geq 5 \\
& & y_1, y_3 \geq 0
\end{array}
$$

cioè

$$
\begin{array}{lll}
\text{(D)} & \min & 3y_1 + y_3 + 16 \\
& & y_1 \geq -3 \\
& & y_2 = 4 \\
& & y_3 \geq -12 \\
& & y_1 - y_3 \geq 5 \\
& & y_1, y_3 \geq 0
\end{array}
$$

Il primo e il terzo vincolo duale sono dominati dalle clausole di non negatività. Pertanto il problema si riscrive

$$
\begin{array}{lll}
\text{(D)} & \min & 3y_1 + y_3 + 16 \\
& & y_1 - y_3 \geq 5 \\
& & y_1, y_3 \geq 0
\end{array}
$$

Il poliedro di questo problema è chiaramente non vuoto. Il suo cono di recessione è il sottoinsieme dei punti di IR^2 che soddisfano contemporaneamente $y_1 \geq 0$, $y_1 \geq y_3$. Tale insieme è contenuto nell'ortante positivo di IR^2, dove ogni vettore $\mathbf{y}$ verifica $\mathbf{yb} = 3y_1 + y_3 \geq 0$: quindi per il teorema fondamentale della PL il problema (D) ammette ottimo finito in uno dei suoi vertici. Ora, per via grafica si vede immediatamente che il poliedro di (D) un solo vertice: $\mathbf{y}^* = (5, 0)$, di valore +31. Evidentemente, $\mathbf{y}^*$ è una soluzione ottima duale; pertanto anche (P) ammette soluzione ottima finita $\mathbf{x}^*$, avendosi $\mathbf{cx}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b} = 31$.

7. Un mobilificio costruisce un modello di libreria con assi di legno (stesso spessore e larghezza) ma di lunghezza variabile. Per la costruzione di una libreria sono necessarie 3 assi da 4 metri, 5 assi da 1 metro e 10 assi da 40 centimetri. Il mobilificio si rifornisce presso una falegnameria che può fornire solo assi di due lunghezze fissate: da 6 metri al prezzo di 5,00 €, da 1,5 metri al prezzo di 1,00 €. Volendo costruire un primo stock di 500 librerie, si vuole determinare quante sono le assi da ordinare per realizzare queste librerie cercando di minimizzare la spesa, supponendo che per convenienza le modalità di taglio siano solo quelle riportate nelle seguenti tabelle (in ogni colonna i dati indicano il numero di assi di una determinata lunghezza che si ottengono tagliando un'asse standard; ad esempio, la prima colonna nella prima tabella indica che tagliando un'asse standard da 6 metri secondo le modalità di taglio M_1 si ottengono un'asse da 4 metri e due assi da 1 metro):

	ASSI DA 6 METRI		ASSI DA 1,5 METRI	
	M_1	M_2	N_1	N_2
4 metri	1	1	0	0
1 metro	2	1	1	0
40 centimetri	0	2	1	3

Formulare il problema e risolverlo con il metodo del simplesso.

Definite le variabili:

x_1 = numero di assi da 6 metri tagliate con la modalità M_1
x_2 = numero di assi da 6 metri tagliate con la modalità M_2
x_3 = numero di assi da 1,5 metri tagliate con la modalità N_1
x_4 = numero di assi da 1,5 metri tagliate con la modalità N_2

il problema può essere formulato come segue:

$$\begin{array}{lll} \min & 5x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 & \text{costo delle assi standard} \\ & x_1 + x_2 \geq 1500 & \text{produzione assi da 4 metri} \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2500 & \text{produzione assi da 1 metro} \\ & 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 5000 & \text{produzione assi da 40 centimetri} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & \end{array}$$

Per semplicità di calcoli, applichiamo il simplesso al problema duale

$$\begin{array}{ll} \max & 1500y_1 + 2500y_2 + 5000y_3 \\ & y_1 + 2y_2 \leq 5 \\ & y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 5 \\ & y_2 + y_3 \leq 1 \\ & y_3 \leq {}^1/_3 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Riscriviamo il problema in forma standard:

$$\begin{array}{ll} \max & 1500y_1 + 2500y_2 + 5000y_3 \\ & y_1 + 2y_2 + w_1 = 5 \\ & y_1 + y_2 + 2y_3 + w_2 = 5 \\ & y_2 + y_3 + w_3 = 1 \\ & y_3 + w_4 = {}^1/_3 \\ & y_1, y_2, y_3, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0 \end{array}$$

La tabella iniziale del simplesso è la seguente:

1500	2500	5000	0	0	0	0	
1	2	0	1	0	0	0	5
1	1	2	0	1	0	0	5
0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	3	0	0	0	1	1

Quella finale è:

0	0	0	–1000	–500	0	$-{}^{4000}/_3$	$-{}^{26500}/_3$
1	0	0	–1	2	0	$-{}^4/_3$	${}^{11}/_3$
0	0	1	0	0	0	${}^1/_3$	${}^1/_3$
0	0	0	0	0	1	$-{}^1/_3$	${}^2/_3$
0	1	0	1	–1	0	${}^2/_3$	${}^2/_3$

dunque la soluzione ottima è $y_1^* = {}^{11}/_3$, $y_2^* = {}^2/_3$, $y_3^* = {}^1/_3$. Vediamo se è possibile ricavare la soluzione del problema primale utilizzando le condizioni di complementarità:

$$\begin{array}{ll} y_1(x_1 + x_2 - 1500) & = 0 \\ y_2(2x_1 + x_2 + x_3 - 2500) & = 0 \\ y_3(2x_2 + x_3 + 3x_4 - 5000) & = 0 \\ x_1(5 - y_1 - 2y_2) & = 0 \\ x_2(5 - y_1 - y_2 - 2y_3) & = 0 \end{array}$$

$x_3(1 - y_2 - y_3) \qquad = 0$

$x_4(1 - 3y_3) \qquad = 0$

Sostituendo i valori della soluzione duale, si ottengono le condizioni:

$x_1 + x_2 = 1500$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 2500$

$2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5000$

Scegliendo:

$x_1 = 0$

$x_2 = 1500$

$x_3 = 1000$

$x_4 = {}^{1000}/_{3}$

si ottiene una soluzione primale ammissibile che soddisfa le condizioni di complementarità. Tale soluzione è quindi ottima per il problema formulato.