

soluzioni della prova scritta del 12 Dicembre 2005

1. Sia U un insieme finito di interi e $\mathfrak{S}$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi X di U tale che

$$\sum_{z \in X} z \geq b$$

per un certo $b \in \mathbb{R}$ fissato. Indicare quale tra le seguenti affermazioni è vera:

- (A) $\mathfrak{S}$ è subclusiva
 (B) $\mathfrak{S}$ gode della proprietà di scambio
 (C) $\mathfrak{S}$ non è subclusiva e non gode della proprietà di scambio

2. Scrivere il duale del problema

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_2 + x_3 + 5x_4 \\ & x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ & x_1 - x_4 = -5 \\ & x_2 + x_3 \leq -2x_4 - 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & 2y_1 - 5y_2 + 3y_3 \\ & y_1 + y_2 \leq 0 \\ & y_1 - y_3 \leq 2 \\ & -y_1 - y_3 \leq 1 \\ & -y_2 - 2y_3 \leq 5 \\ & y_3 \geq 0 \end{array}$$

3. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, si determini, se esiste, il valore ottimo di z per il problema

$$\begin{array}{ll} \max & z = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \\ & x_3 - x_4 \geq -1 \\ & x_2 + x_4 \leq 2 \\ & x_4 \geq -2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 + x_3 + x_4 \leq 2 \\ & x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\leq$
-1	1	2	1	-1	0
1	-1	-2	-1	1	0
0	0	0	-1	1	1
0	0	1	0	1	2
0	0	0	0	-1	2
0	1	1	1	0	2
0	1	0	1	1	2

z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\leq$
0	0	0	0	0	0
1	0	-1	0	1	2
1	0	-2	0	2	2
0	0	0	-1	1	1
0	0	1	0	1	2
0	0	0	0	-1	2

z	x_2	x_3	x_4	$\leq$
1	0	0	2	4
1	0	0	4	6
0	0	-1	1	1
0	0	0	-1	2

z	x_3	x_4	$\leq$
1	0	0	8
1	0	0	14
0	-1	0	3

Il valore della soluzione ottima è 8.

4. Sia (P) un problema di PL e Q il poliedro che rappresenta la regione ammissibile. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

- (A) una soluzione ottima di (P) si può trovare solo su una faccia F di Q con $\dim(F) = 0$
- (B) una soluzione ottima di (P) può non trovarsi su un vertice di Q
- (C) una soluzione ottima di (P) si trova solo su una faccia di Q

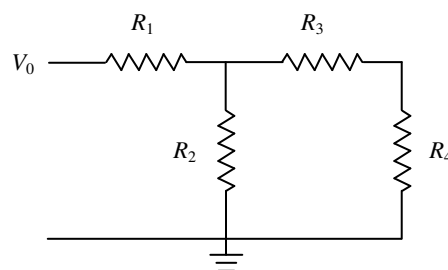
5. **Gran Mogol.** Le giovani marmotte devono andare al campeggio. Qui, Quo e Qua preparano gli zaini dividendosi $n = 10$ oggetti di peso $a_1, \dots, a_n$. Formulare come programmazione lineare 0-1 il problema di ripartire equamente il peso nei tre zaini.

Siano x_k, y_k variabili binarie definite per $k = 1, \dots, n$ col seguente significato: $x_k = 1$ ($y_k = 1$) se e solo se l'oggetto k finisce nello zaino di Qui (di Quo). Se l'oggetto k non finisce né nello zaino di Qui né in quello di Quo, allora necessariamente finisce in quello di Qua. Il problema si può allora formulare così:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1..n} a_k x_k \\ & \sum_{k=1..n} a_k x_k \geq \sum_{k=1..n} a_k y_k \\ & \sum_{k=1..n} a_k y_k \geq \sum_{k=1..n} a_k (1 - x_k - y_k) \\ & x_k, y_k \in \{0, 1\} \text{ per } k = 1, \dots, n \end{aligned}$$

6. Black out

I componenti di un circuito elettrico dissipano l'energia che fluisce loro attraverso con la corrente scambiando calore con l'esterno. La capacità di scambiare calore essendo limitata, vi è un limite alla potenza massima (energia dissipata nell'unità di tempo) raggiungibile, oltre il quale il dispositivo si deteriora. Tale limite dipende dalla conformazione del dispositivo e dalla temperatura ambiente. Sia P_k la potenza massima dissipabile a temperatura T nel componente k del partitore resistivo illustrato in figura. Tenendo presente che una corrente i (mA) che attraversi una resistenza R (k Ω) sviluppa una potenza pari a $i^2 R$ (mW) e che per la legge di Ohm la corrente nella resistenza e la tensione ai suoi capi sono legate dalla relazione $\Delta V = R \cdot i$, formulare in termini di programmazione lineare il problema di calcolare la tensione massima $V_0 \in \mathbb{R}_+$ (volt) applicabile al morsetto indicato (assumendo nullo il potenziale elettrico a terra).



Applicando il metodo del simplesso, calcolare V_0 per i seguenti valori:

k	R_k (k Ω)	P_k (mW)
1	10	90
2	20	∞
3	40	40
4	30	120

Sia i_1 la corrente circolante nella maglia costituita da R_1 e R_2 , e i_2 quella circolante nella maglia costituita da R_2, R_3 e R_4 . Le leggi di Ohm applicate alle due maglie si scrivono:

$$\begin{aligned} V_0 &= R_1 i_1 + R_2 (i_1 - i_2) & V_0 - 30i_1 + 20i_2 &= 0 \\ 0 &= R_2 (i_2 - i_1) + R_3 i_2 + R_4 i_2 & -20i_1 + 90i_2 &= 0 \end{aligned}$$

Poiché la potenza dissipata da una resistenza R_k attraversata da una corrente i è pari a $i^2 R_k$, deve aversi:

$$i^2 R_k \leq P_k \quad \text{cioè} \quad |i| \leq \sqrt{P_k/R_k} \quad \text{per } k = 1, \dots, 4$$

e quindi

$$i_1 \leq 3 \quad i_1 - i_2 \leq \infty \quad i_2 \leq 1 \quad i_2 \leq 4$$

In definitiva il problema si scrive

$$\begin{aligned} \max \quad & V_0 \\ & V_0 - 30i_1 + 20i_2 = 0 \\ & -20i_1 + 90i_2 = 0 \\ & i_1 \leq 3 \\ & i_2 \leq 1 \\ & V_0, i_1, i_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Passando a risolvere con il metodo del simplesso, scriviamo tabella iniziale

V_0	i_1	i_2	w_1	w_2	
1					
1	-30	20			0
	-20	90			0
	1		1		3
		1		1	1

Per rendere canonica questa tabella risolviamo il problema ausiliario:

V_0	i_1	i_2	w_0	w_1	w_2	
			1			
1	-30	20				0
	-20	90	1			0
	1			1		3
		1			1	1

Rendiamo canonica anche questa tabella sottraendo la riga 2 alla riga 0:

V_0	i_1	i_2	w_0	w_1	w_2	
	20	-90				
1	-30	20				0
	-20	90	1			0
	1			1		3
		1			1	1

Pur avendo coefficienti della riga 0 non positivi, la tabella è ottima in quanto in corrispondenza alla base trovata (che è degenere) la funzione obiettivo vale 0. Tuttavia per ottenere una prima base del problema di partenza occorre far uscire la variabile ausiliaria w_0 dalla base; eseguiamo quindi un'operazione di pivot in riga 2 e colonna 3:

V_0	i_1	i_2	w_0	w_1	w_2	
			1			
1	-230/9		-20/9			0
	-2/9	1	1/90			0
	1			1		3
	2/9		-1/90		1	1

Trasformiamo ora la tabella eliminando la colonna w_0 e sostituendo alla riga 0 i coefficienti della funzione obiettivo originale:

V_0	i_1	i_2	w_1	w_2	
1					
1	$-230/9$				0
	$-2/9$	1			0
	1		1		3
	$2/9$			1	1

Rendiamo canonica anche questa tabella sottraendo la riga 1 alla riga 0

V_0	i_1	i_2	w_1	w_2	
	$230/9$				
1	$-230/9$				0
	$-2/9$	1			0
	1		1		3
	$2/9$			1	1

Si può ottenere una base non peggiore di quella corrente eseguendo un'operazione di pivot in riga 3 e colonna 2:

V_0	i_1	i_2	w_1	w_2	
			$-230/9$		$-230/3$
1			$230/9$		$230/3$
		1	$2/9$		$2/3$
	1		1		3
			$-2/9$	1	$1/3$

Questa base è evidentemente ottima. Il massimo potenziale elettrico applicabile al morsetto è pertanto di $230/3 \approx 76,67$ volt.