RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**

soluzione della prova scritta del 12 Dicembre 2005

1. Sia U un insieme finito di interi e $\Im$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi X di U tale che

$$\sum_{z\in X} z \le b$$

per un certo $b\in \mathbb{R}$ fissato. Indicare quale tra le seguenti affermazioni è vera:

(A) $\Im$ non è subclusiva e non gode della proprietà di scambio
(B) $\Im$ gode della proprietà di scambio
(C) $\Im$ è subclusiva.

2. Scrivere il duale del problema

$$\begin{array}{llll} \min & x_1 - x_3 + 2x_4 & & \\ & x_1 + x_4 & \le & 1 \\ & 2x_3 + x_4 & = & -x_2 - 1 \\ & x_2 - x_3 & \ge & 2 \\ & x_1, x_2, x_3 & \ge & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \max & -y_1 - y_2 + 2y_3 & & \\ & -y_1 & \le & 1 \\ & y_2 + y_3 & \le & 0 \\ & 2y_2 - y_3 & \le & -1 \\ & -y_1 + y_2 & = & 2 \\ & y_1, y_3 \ge 0 & & \end{array}$$

3. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, si determini, se esiste, il valore ottimo di z per il problema

$$\begin{array}{lll} \max \quad z = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & & \\ -x_1 - x_2 \qquad - x_4 & \ge & -2 \\ x_2 + x_3 + x_4 & \le & 2 \\ -x_2 + x_3 & \le & 1 \\ -x_1 \qquad - x_3 & \ge & -2 \\ -x_3 & \le & 3 \\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, 4 & & \end{array}$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\le$
−1	2	1	−1	1	0
1	−2	−1	1	−1	0
0	1	1	0	1	2
0	0	1	1	1	2
0	0	−1	1	0	1
0	1	0	1	0	2
0	0	0	−1	0	3

z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\le$
0	0	0	0	0	0
1	−1	0	1	0	2
1	−2	0	2	0	2
0	0	−1	1	0	1
0	1	0	1	0	2
0	0	0	−1	0	3

z	x_1	x_2	x_3	$\le$
1	0	0	2	4
1	0	0	4	6
0	0	−1	1	1
0	0	0	−1	3

z	x_2	x_3	$\le$
1	0	0	10
1	0	0	18
0	−1	0	4

Il valore della soluzione ottima è 10.

4. Sia (P) un problema di PL e Q il poliedro che rappresenta la regione ammissibile. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

(A) una soluzione ottima di (P) può trovarsi solo su un vertice di Q
(B) una soluzione ottima di (P) può trovarsi solo su uno degli iperpiani che definiscono Q
(C) una soluzione ottima di (P) può non trovarsi su una faccia di Q

5. Alta val di Susa

Un treno ad alta velocità, partito all'istante t_0, percorre un tratto lungo s_1 = 120 km a velocità v_1, al termine del quale giunge in stazione. Un secondo treno parte anch'esso all'istante t_0 e dopo un tratto lungo s_2 = 80 km percorso a velocità v_2 giunge nella medesima stazione. Sulla tratta percorsa dal primo treno la massima velocità consentita è di 240 km/h, su quella percorsa dal secondo (che è diversa da quella percorsa dal primo) è invece di 330 km/h. Secondo l'orario, il secondo treno dovrà giungere in stazione contemporaneamente al primo. Indagini di mercato fanno ritenere che la clientela del primo treno, composta di manager e veline, apprezzi molto di più la velocità della clientela del secondo treno, composta di massaie e pendolari. Facendo infatti un calcolo di costi e benefici si è scoperto che aumentare di 1 km/h la velocità del primo treno comporta un vantaggio quantificabile in 15 centesimi di euro, mentre aumentare della stessa quantità la velocità del secondo non comporta alcun vantaggio, bensì un costo secco di 12 centesimi di euro per maggiori consumi. Usando il metodo del simplesso si scelgano le velocità v_1 e v_2 in modo che il costo complessivo sia minimizzato nel rispetto dei vincoli descritti.

I due treni partono nel medesimo istante t_0, e il treno k giunge in stazione all'istante $t_0 + s_k/v_k$. L'orario richiede che si abbia

$$t_0 + s_1/v_1 \;=\; t_0 + s_2/v_2 \qquad \text{cioè} \qquad s_1v_2 - s_2v_1 \;=\; 0$$

Inoltre deve aversi

$$\begin{aligned} v_1 &\leq 240 \\ v_2 &\leq 330 \end{aligned}$$

L'obiettivo si scrive

$$\min \quad -15v_1 + 12v_2$$

Passando a risolvere con il metodo del simplesso, scriviamo tabella iniziale

v_1	v_2	w_1	w_2	
–15	12			
–80	120			0
1		1		240
	1		1	330

Per rendere canonica questa tabella risolviamo il problema ausiliario:

v_1	v_2	w_0	w_1	w_2	
		1			
–80	120	1			0
1			1		240
	1			1	330

Rendiamo canonica anche questa tabella sottraendo la riga 1 alla riga 0:

v_1	v_2	w_0	w_1	w_2	
80	–120				
–80	**120**	1			0
1			1		240
	1			1	330

Pur avendo coefficienti della riga 0 non positivi, la tabella è ottima in quanto in corrispondenza alla base trovata (che è degenere) la funzione obiettivo vale 0. Tuttavia per ottenere una prima base del problema di partenza occorre far uscire la variabile ausiliaria w_0 dalla base; eseguiamo quindi un'operazione di pivot in riga 1 e colonna 2:

v_1	v_2	w_0	w_1	w_2	
		1			
–2/3	1	1/120			0
1			1		240
2/3		– 1/120		1	330

Trasformiamo ora la tabella eliminando la colonna w_0 e sostituendo alla riga 0 i coefficienti della funzione obiettivo originale:

v_1	v_2	w_1	w_2	
–15	12			
–2/3	1			0
1		1		240
2/3			1	330

Rendiamo canonica anche questa tabella sommando alla riga 0 la riga 1 moltiplicata per –12

v_1	v_2	w_1	w_2	
–7				
–2/3	1			0
1		1		240
2/3			1	330

Si può ottenere una base non peggiore di quella corrente eseguendo un'operazione di pivot in riga 2 e colonna 1:

v_1	v_2	w_1	w_2	
		7		1.680
	1	2/3		160
1		1		240
		–2/3	1	170

Questa base è evidentemente ottima. Il primo treno dovrà muoversi a $v_1^* = 240$ km/h, il secondo a $v_2^* = 160$ km/h.

6. Blocchi

Dato un insieme $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ di interi positivi, definiamo blocco un $B \subseteq A$ i cui elementi possono essere divisi in due sottoinsiemi, B_1 e B_2, in modo che la somma degli elementi in B_1 è uguale alla somma di quelli in B_2. Ad esempio, se $A = \{2, 5, 5, 7, 13, 14, 18\}$, $B = \{5, 5\}$ costituisce un blocco. Vogliamo trovare il massimo numero di blocchi di quest'insieme A che contengano al più 3 elementi e, presi a due a due, non abbiano elementi in comune. Formulare il problema come massima clique su un grafo opportuno (e disegnarlo qui sotto).

Nell'insieme $A = \{a_1, \ldots, a_7\}$ sono presenti i seguenti blocchi con meno di 4 elementi: $\{a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_2, a_4\}$, $\{a_1, a_3, a_4\}$, $\{a_2, a_5, a_7\}$, $\{a_3, a_5, a_7\}$. Il grafo dovrà avere un nodo per ognuno di questi blocchi, e un arco tra due nodi se e solo se i due blocchi hanno intersezione vuota: