RICERCA OPERATIVA **GRUPPO B**

prova scritta del 20 Settembre 2005

1. Dato un grafo simmetrico $G = (N_1 \cup N_2, E)$ (con $|N_1|=|N_2|$), sia $U = E$. La famiglia $\Im_1$ (risp. $\Im_2$) è formata da tutti gli insiemi $X_{12} \subseteq U$ (risp. $X_{21} \subseteq U$) che inducono assegnamenti massimali di N_1 (risp. N_2) in N_2 (risp. N_1). La famiglia $\Im_1 \cap \Im_2$

(A) non è subclusiva
(B) è subclusiva ma non gode della proprietà di scambio
(C) è un matroide

2. Indicare qual è il duale del problema (P):

$$(P) \quad \max \; x_1 - 5x_2 + 2x_4$$
$$\begin{aligned} x_1 - x_4 &\le 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_3 + 2x_4 &\ge 3 \\ x_1, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

(A) $\max \; 3y_3 + 4(y_2 - y_1)$
$$\begin{aligned} -y_2 + 2y_3 &\le -2 \\ y_2 + y_1 &\ge 1 \\ y_3 - y_1 &\ge 0 \\ y_1 &= -5 \\ y_2, y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

(B) $\max \; 3y_3 - 4(y_2 - y_1)$
$$\begin{aligned} y_2 + 2y_3 &\le -2 \\ y_2 + y_1 &\le 1 \\ y_3 - y_1 &\ge 0 \\ y_1 &= -5 \\ y_1, y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

(C) $\max \; 3y_3 - 4(y_2 - y_1)$
$$\begin{aligned} y_2 + 2y_3 &\le -2 \\ y_2 - y_1 &\ge 1 \\ y_1 &= -5 \\ y_3 - y_1 &\ge 0 \\ y_2, y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

3. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, si determini, se esiste, il valore ottimo di z nel problema

$$\min \quad z = x_1 + x_2 - x_3 + x_4$$
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &\le 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 &\le 1 \\ x_1 - 2x_3 + 2x_4 &\le 1 \\ -4x_2 + x_3 &\le -4 \\ x_i \in \mathbb{R},\ i&=1,\dots,4 \end{aligned}$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\le$
–1	1	1	–1	1	0
1	–1	–1	1	–1	0
0	1	–1	1	0	1
0	–1	2	0	–1	1
0	1	0	–2	2	1
0	0	–4	1	0	–4

z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\le$
0	0	–4	1	0	–4
0	1	–1	1	0	1
0	0	0	0	0	0
–1	0	3	–1	0	1
2	–1	–2	0	0	1
0	–1	4	–2	0	3

z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\le$
0	0	–4	1	0	–4
–1	0	3	–1	0	1
2	0	–3	1	0	2
0	0	3	–1	0	4

z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\le$
–1	0	–1	0	0	–3
0	0	–1	0	0	0
1	0	0	0	0	3
2	0	0	0	0	6

Il problema è illimitato.

4. Sia $\mathbf{x}^*$ una soluzione ammissibile di un problema (P) di PL con funzione obiettivo max $\mathbf{cx}$, dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

(A) sia $\mathbf{y}$ una soluzione ammissibile del duale di (P); allora $\mathbf{x}^*$ è ottima se e solo se $\mathbf{cx}^*$ è maggiore o uguale al valore della funzione obiettivo del duale calcolata in $\mathbf{y}$;

(B) sia $\mathbf{y}$ una soluzione ammissibile del duale di (P), $\mathbf{x}^*$ è ottima se e solo se $\mathbf{cx}^*$ è minore o uguale al valore della funzione obiettivo del duale calcolata in $\mathbf{y}$;

(C) $\mathbf{x}^*$ è ottima se e solo se risulta $\mathbf{cx}^* > \mathbf{cx}$ per ogni soluzione ammissibile $\mathbf{x}$ di (P), con $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$.

5. Un'ottima stoffa

Un'industria tessile produce 3 tessuti diversi utilizzando altrettanti tipi di filato. La composizione dei tessuti è riportata nella seguente tabella:

	Tessuto 1	*Tessuto 2*	*Tessuto 3*
acrilico	15%	8%	
cotone	75%	84%	80%
poliammide	10%	8%	20%

La realizzazione di un rotolo di tessuto 1 (rispettivamente 2, 3) da 100 metri richiede complessivamente 18.000 (rispettivamente, 20.000, 15.000) metri di filato. Sapendo che il tessuto 1 (rispettivamente 2, 3) viene venduto a 1,40 euro (rispettivamente 3,70 euro, 2,80 euro) il metro, calcolare quanti metri di tessuto 1, 2, 3 conviene produrre per massimizzare i profitti avendo a disposizione in magazzino 156.000 (rispettivamente 982.800, 130.000) metri di acrilico (rispettivamente cotone, poliammide).

Il profitto corrispondente alla produzione di x_j metri di tessuto j, $j = 1, 2, 3$, vale:

$$p(\mathbf{x}) = 1{,}4x_1 + 3{,}7x_2 + 2{,}8x_3$$

Indichiamo con a_{ij} i metri di filato i necessari per produrre 1 metro di tessuto j. Tenendo conto della composizione dei tessuti otteniamo i seguenti valori:

a_{ij}	*Tessuto 1*	*Tessuto 2*	*Tessuto 3*
acrilico	27	16	0
cotone	135	168	120
poliammide	18	16	30
Totale mt. filato	180	200	150

La disponibilità di filato in magazzino impone dunque i seguenti vincoli:

$$
\begin{array}{rcl}
27x_1 + 16x_2 & \leq & 156.000 \\
135x_1 + 168x_2 + 120x_3 & \leq & 982.800 \\
18x_1 + 16x_2 + 30x_3 & \leq & 130.000
\end{array}
$$

avendosi ovviamente

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Risolviamo il problema con il metodo del simplesso. Si dispone immediatamente della base iniziale:

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
14	37	28				
27	16		1			156.000
135	**168**	120		1		982.800
18	16	30			1	130.000

Eseguendo un'operazione di pivot in corrispondenza della colonna 2 e della riga 2 si ricava:

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
–3.232/7		11/7		–37		–216.450
99/7		–80/7	1	–16		62.400
45/56	1	5/7		1		5.850
36/7		**130/7**		–16	1	36.400

Eseguendo poi un'operazione di pivot in corrispondenza della colonna 3 e della riga 3:

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
–210.278/455				–2.493/65	–11/130	–219.530
225/13			1	–336/13	8/13	84.800
63/520	1			21/13	–5/130	4.450
18/65		1		–56/65	7/130	1.960

La soluzione ottenuta richiede di non produrre tessuto 1, e di produrre rispettivamente 4.450 metri di tessuto 2 e 1.960 di tessuto 3. Essa è ottima dal momento che tutti i costi ridotti sono non positivi, e il corrispondente profitto (leggibile nella casella in alto a destra, cambiato di segno e scalato di 10) vale 21.953 euro.