RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**

prova scritta del 20 Settembre 2005

N.B. Le soluzioni dell'Esercizio 1 non sono state valutate per via di un errore di stampa nel testo.

2. Indicare qual è il duale del problema (P):

$$
\text{(P)} \quad \begin{aligned}
\max\ & 3x_1 - 4x_2 + 7x_4 \\
& x_1 - x_4 \leq 6 \\
& x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\
& -x_3 + 2x_4 \geq 2 \\
& x_1, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

(A)
$$
\begin{aligned}
\max\ & 2y_3 + 6(y_2 - y_1) \\
& -y_2 + 2y_3 \leq -7 \\
& y_2 + y_1 \geq 3 \\
& y_3 - y_1 \geq 0 \\
& y_1 = -4 \\
& y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

(B)
$$
\begin{aligned}
\max\ & 2y_3 - 6(y_2 - y_1) \\
& y_2 + 2y_3 \leq -7 \\
& y_2 - y_1 \geq 3 \\
& y_1 = -4 \\
& y_3 - y_1 \geq 0 \\
& y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

(C)
$$
\begin{aligned}
\max\ & 2y_3 - 6(y_2 - y_1) \\
& y_2 + 2y_3 \leq -7 \\
& y_2 + y_1 \leq 3 \\
& y_3 - y_1 \geq 0 \\
& y_1 = -4 \\
& y_1, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

3. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, determinare, se esiste, il valore ottimo di z per il problema

$$
\begin{aligned}
\max\ z = {} & x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \\
& x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\
& -x_1 + 2x_2 - x_4 \leq 1 \\
& x_1 - x_3 - x_4 \leq 1 \\
& -x_2 + x_3 \leq 0 \\
& x_i \in \mathbb{R},\ i=1,\dots,4
\end{aligned}
$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\leq$
–1	1	1	–1	2	0
1	–1	–1	1	–2	0
0	1	–1	1	0	1
0	–1	2	0	–1	1
0	1	0	–1	–1	1
0	0	–1	1	0	0

z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\leq$
0	0	0	0	0	0
–1	–1	5	–1	0	2
–1	3	1	–3	0	2
0	1	–1	1	0	1
0	0	–1	1	0	0

z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\leq$
0	0	–1	1	0	0
–1	0	4	0	0	3
–4	0	16	–6	0	8

z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\leq$
–1	0	4	0	0	3
–4	0	10	0	0	8

Il problema è illimitato superiormente.

4. Sia $\mathbf{x}^*$ una soluzione ammissibile di un problema (P) di PL con funzione obiettivo min $\mathbf{cx}$. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

(A) $\mathbf{x}^*$ è ottima se e solo se risulta $\mathbf{cx}^* < \mathbf{cx}$ per ogni soluzione ammissibile $\mathbf{x}$ di (P), con $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$;

(B) sia $\mathbf{y}$ una soluzione ammissibile del duale di (P); allora $\mathbf{x}^*$ è ottima se e solo se $\mathbf{cx}^*$ è minore o uguale al valore della funzione obiettivo del duale calcolata in $\mathbf{y}$;

(C) sia $\mathbf{y}$ una soluzione ammissibile del duale di (P); allora $\mathbf{x}^*$ è ottima se e solo se $\mathbf{cx}^*$ è maggiore o uguale al valore della funzione obiettivo del duale calcolata in $\mathbf{y}$.

5. Un problema di distribuzione

Una società farmaceutica possiede due impianti che producono due principi attivi distinti a partire da uno stesso tipo di risorsa. La società dispone di un magazzino contenente $r = 100$ unità di questa risorsa e distante 120 km dal primo impianto e 100 dal secondo. La produzione di un'unità di principio attivo nel primo consuma $a_1 = 40$ unità di risorsa; produrre invece un'unità di principio attivo nel secondo impianto ne consuma $a_2 = 35$ unità; inoltre attualmente i due impianti dispongono rispettivamente di $b_1 = 20$ e $b_2 = 40$ unità di risorsa. Si indichino con x_1 e x_2 le quantità di principio attivo rispettivamente prodotte nel primo e nel secondo impianto. Tenendo conto che il prodotto del primo (nel secondo) impianto si colloca sul mercato a 5000 euro (6200 euro) per unità, e che il costo di trasporto di un'unità di risorsa dal deposito al primo (al secondo) impianto è di 0,25 euro (0,31 euro) per chilometro, si calcolino i livelli di produzione nei due impianti e la distribuzione della risorsa tra di essi che massimizzano il profitto netto (ricavo dalla vendita meno costi di trasporto), vincolando la soluzione a svuotare per intero il magazzino.

Indichiamo con y_1 e y_2 le quantità di risorsa rispettivamente trasportate dal magazzino agli impianti 1 e 2. Se c_1 e c_2 indicano i relativi costi di trasporto per unità, tenendo conto delle distanze in gioco si ha $c_1 = 0{,}25 \cdot 120 = 30$ euro/unità, $c_2 = 0{,}31 \cdot 100 = 31$ euro/unità. Il profitto complessivo corrispondente al trasporto di y_j unità di risorsa e alla produzione di x_j unità di principio attivo nell'impianto j ($j = 1, 2$) vale:

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad = \quad 5.000x_1 + 6.200x_2 - 30y_1 - 31y_2$$

Considerando il consumo di risorsa presso i due impianti, la produzione dovrà soddisfare i vincoli

$$\begin{array}{rcccl} 40x_1 & \le & b_1 + y_1 & = & 20 + y_1 \\ 35x_2 & \le & b_2 + y_2 & = & 40 + y_2 \end{array}$$

Il vincolo sulla disponibilità di risorsa da trasportare si scrive invece

$$y_1 + y_2 = 100$$

Passando a risolvere con il metodo del simplesso, scriviamo tabella iniziale

x_1	x_2	y_1	y_2	w_1	w_2	
5.000	6.200	–30	–31			
40		–1		1		20
	35		–1		1	40
		1	1			100

Possiamo facilmente rendere canonica questa tabella sostituendo alla riga 2 la stessa sommata alla riga 3, e successivamente moltiplicando per 31 la riga 3 e sommandola alla riga 0:

x_1	x_2	y_1	y_2	w_1	w_2	
5.000	6.200	1				3.100
40		–1		1		20
	35	1	0		1	140
		1	1			100

La soluzione di base corrisponde a spedire le 100 unità di risorsa del magazzino all'impianto 2, senza tuttavia attivare la produzione degli impianti. Ovviamente tale soluzione comporta solo un costo, che, come evidenziato dal valore assunto dalla casella in alto a destra, è chiaramente di 3.100 euro. Eseguendo un'operazione di pivot in corrispondenza della colonna 2 e della riga 2:

x_1	x_2	y_1	y_2	w_1	w_2	
5.000		–1.233/7			–6.200	–21.700
40		–1		1		20
	1	1/35			1	4
		1	1			100

Eseguendo a questo punto un'operazione di pivot in corrispondenza di riga e colonna 1 si ha:

x_1	x_2	y_1	y_2	w_1	w_2	
		–358/7		–125	–6.200	–24.200
1		–1/40		1/40		1/2
	1	1/35			1	4
		1	1			100

La soluzione ottenuta richiede di non trasportare altra risorsa all'impianto 1, e di produrre rispettivamente ½ unità di principio attivo nell'impianto 1 e 4 nell'impianto 2. Tale soluzione garantisce un profitto netto di 24.200 euro ed è ottima dal momento che tutti i costi ridotti sono non positivi.