RICERCA OPERATIVA

prova scritta del 25 giugno 2012 **GRUPPO A**

1. Dati $\mathbf{v}_1 = (3, {}^1/_3, 1)$, $\mathbf{v}_2 = ({}^1/_3, 3, {}^1/_3)$ e $\mathbf{v}_3 = (1, {}^1/_3, 2)$ scrivete un vettore $\mathbf{w}$ che sia una loro combinazione convessa e un vettore $\mathbf{z}$ che sia una loro combinazione solamente conica.

Banalmente, $\mathbf{z}$ si può ottenere combinando $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ con coefficienti tutti pari a 3: si ha $\mathbf{w} = (13, 11, 10)$. Per $\mathbf{w}$ si può altrettanto banalmente usare coefficienti 1, 0, 0, ottenendo $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1$.

2. Dato il problema lineare

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq -1 \\ & x_1 - x_2 - x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

scrivete il duale associato e risolvetelo tramite il metodo grafico. Che cosa possiamo dire della soluzione ottima del problema primale?

Il duale si può scrivere

$$\begin{array}{ll} \max & y_1 + y_2 \\ & -y_1 + y_2 \leq 3 \\ & -y_1 - y_2 \leq -1 \\ & y_1 - y_2 \leq 2 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Risolto per via grafica, il problema si rivela illimitato superiormente: dunque il primale non ammette soluzione.

3. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvete il seguente problema di programmazione lineare, esibendo la soluzione ottima (qualora esista) e il suo valore, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato:

$$\begin{array}{ll} \max & 5x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 5 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Riscriviamo il problema in forma di $\leq$, eliminando il vincolo ridondante $x_2 \geq 0$ (dominato da $x_2 \geq 1$) e aggiungendo il vincolo $z \leq 5x_1 + x_2$. Risolvendo si ha:

z	x_1	x_2	$\leq$
1	–5	–1	0
0	–2	–1	–5
0	2	3	6
0	0	–1	–1
0	–1	0	0

z	x_1	x_2	$\leq$
2	0	13	30
0	0	2	1
0	0	3	6
0	0	–1	–1

z	x_1	x_2	$\leq$
2	0	0	17
0	0	0	–1
0	0	0	3

La terza tabella corrisponde alle disequazioni $2z \leq 17$, $2z \leq 30$. La più stringente consentirebbe a z di valere al massimo $z^* = 17/2$. Tuttavia il problema è inammissibile per via del secondo vincolo, $0 \leq -1$.

4. **Scommettiamo che...** La Senectus F.C: deve giocare un'importante partita. I bookmaker inglesi danno la squadra vincente al 25%, perdente al 40%, e per il restante 35% optano per un pareggio. I bookmaker italiani, che hanno informazioni diverse, danno invece le seguenti percentuali: vincente al 35%, perdente al 25%, pareggio al 40%. Il portiere della Senectus Pierluigi Sbruffon, appassionato scommettitore, vuole giocarsi un euro simbolico ma per ovvie ragioni non può farlo direttamente. Incarica allora un suo amico dicendogli: gioca quest'euro con gli inglesi o gli italiani, decidi tu, ma non tutto sulla vittoria: metti x centesimi sul pareggio, s sulla sconfitta e solo v sulla vittoria. Quali sono i valori di x, s e v che massimizzano la vincita nell'ipotesi peggiore? Risolvete il problema col metodo del simplesso.

Il testo non specifica i valori delle vincite corrispondenti alle puntate, ma un euro puntato per intero, ad esempio, sulla Senectus vincente si recupera nel 25% dei casi usando l'agenzia inglese, nel 35% usando quella italiana. Ciò equivale a dire che dell'euro puntato in questo modo si recuperano nel primo caso 25 cent, nel secondo 35. Sbruffon ignora quale sarà la decisione dell'amico ma vuole cautelarsi rispetto all'esito peggiore di questa decisione: se puntasse cioè l'euro tutto sulla vittoria, dovrebbe attendersi di recuperarne solo 25 cent. Per migliorare il risultato della scommessa si può allora mediare la probabilità di riprendersi l'euro ripartendo la puntata fra i vari risultati: ciò vuol dire scegliere x, s e v in modo che $x + s + v = 1$, $x \geq 0$, $s \geq 0$, $v \geq 0$. Il valore atteso del recupero r verifica

$$100r = 35x + 40s + 25v \quad \text{se ci si serve dell'agenzia inglese}$$

$$100r = 40x + 25s + 35v \quad \text{se ci si serve dell'agenzia italiana}$$

Come detto, il caso peggiore è, tra i due, quello per cui r è minimo. L'obiettivo consiste dunque nel massimizzare r soggetto a

$$100r \leq 35x + 40s + 25v$$

$$100r \leq 40x + 25s + 35v$$

e ai vincoli scritti in precedenza, ai quali si aggiunge $r \geq 0$. Per risolvere il problema si può rilasciare il vincolo $x + s + v = 1$ in $x + s + v \leq 1$: la funzione obiettivo è infatti non decrescente con x, s e v, quindi se c'è una soluzione ottima che soddisfa il vincolo con il segno < ve ne sarà una che lo soddisfa col segno =. Quest'osservazione permette di scrivere immediatamente una base iniziale (degenere) del problema. Applicando il simplesso si ottiene la soluzione ottima s = 0,25€, x = 0,75€ che corrisponde a un recupero atteso di 36,25 centesimi di €. A questo recupero va ovviamente sommata la vincita pagata che però, come detto, non era specificata fra i dati del problema.

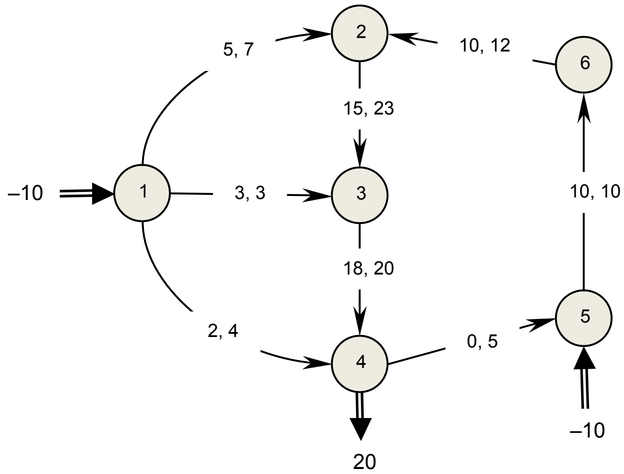
5. **Παντα ρει (tutto scorre, Eraclito, VI sec a.C.).** Nella rete conservativa di figura, i due numeri su ciascun arco misurano rispettivamente il flusso e la capacità dell'arco (tutte le soglie sono fissate a 0), mentre quelli associati ai nodi rappresentano la domanda e l'offerta.

A) Dite se la distribuzione di flusso indicata corrisponde a una soluzione di base.

B) In caso negativo, determinate una soluzione di base con opportune operazioni di pivot.

C) Calcolati i costi ridotti associati, stabilite poi se la soluzione di base trovata è ottima, o se è invece possibile tentare di migliorarla con un'operazione di pivot.

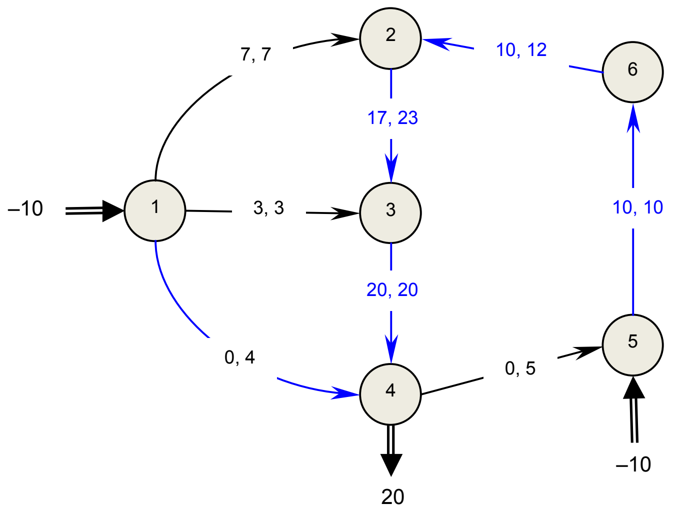
arco	costo per unità di flusso
12	2
13	10
14	2
23	1
34	1
45	3
56	6
62	4



A) La soluzione indicata non è di base: infatti gli archi corrispondenti a valori di flusso strettamente compresi fra soglia e capacità formano il ciclo {12, 23, 34, 14}.

B) Il ciclo si può eliminare con un'operazione di pivot, sommando al flusso corrente una circolazione di valore $\delta_{12} = \delta_{23} = \delta_{34} = 2$, $\delta_{14} = -2$. Nella nuova soluzione gli archi con valori di flusso strettamente compresi fra soglia e capacità sono 23, 62. Completando l'albero in modo arbitrario con archi che non formino cicli si ottiene una base associata alla nuova soluzione (che risulta degenere).

C) Come albero ricoprente scegliamo ad esempio l'insieme T = {23, 62, 56, 34, 14} (indicato in blu nella figura). Fissiamo arbitrariamente il potenziale del nodo 5 al valore $y_5 = 0$ e, servendoci dei dati in tabella, annulliamo i costi ridotti in base con la formula $y_j = c_{ij} + y_i$. Si ricava $y_6 = c_{56} + y_5 = 6$, $y_2 = c_{62} + y_6 = 10$, $y_3 = c_{23} + y_2 = 11$, $y_4 = c_{34} + y_3 = 12$, $y_1 = y_4 - c_{14} = 10$. Con questi numeri si vede che l'arco 12 ha costo ridotto pari a $c_{12} + y_1 - y_2 = 2$. Trattandosi di un arco saturo può dunque essere conveniente farlo entrare in base.



GRUPPO B

1. Dati $\mathbf{v}_1 = (2, ½, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (½, 2, ½)$ e $\mathbf{v}_3 = (1, ½, 3)$ scrivete un vettore $\mathbf{w}$ che sia una loro combinazione convessa e un vettore $\mathbf{z}$ che sia una loro combinazione solamente conica.

Soluzione analoga a quella del Gruppo A.

2. Dato il problema lineare

$$\begin{array}{lrl} \min & -x_1 - 3x_2 + x_3 & \\ & -x_1 + x_2 & \leq -1 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 & \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

scrivete il duale associato e risolvetelo tramite il metodo grafico. Che cosa possiamo dire della soluzione ottima del problema primale?

Il duale si può scrivere

$$\begin{array}{lrl} \max & y_1 & \\ & y_1 - y_2 & \leq -1 \\ & -y_1 - y_2 & \leq -3 \\ & y_2 & \leq 1 \\ & y_1, y_2 & \geq 0 \end{array}$$

Disegnando il poliedro si vede che questo non ammette soluzione. Da questa sola informazione non può dedursi nulla riguardo al problema primale.

3. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvete il seguente problema di programmazione lineare, esibendo la soluzione ottima (qualora esista) e il suo valore, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato:

$$\begin{array}{lrl} \max & 2x_1 + 3x_2 & \\ & x_1 - 2x_2 & \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 & \leq 18 \\ & x_2 & \leq 10 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Riscriviamo il problema in forma di $\leq$ e aggiungiamo il vincolo $z \leq 2x_1 + 3x_2$. Risolvendo si ha:

z	x_1	x_2	$\leq$
1	–2	–3	0
0	1	–2	4
0	2	1	18
0	0	1	10
0	–1	0	0
0	0	–1	0

z	x_1	x_2	$\leq$
1	4	0	54
1	–2	0	30
0	5	0	40
0	1	0	24
0	2	0	18
0	–1	0	0

z	x_1	x_2	$\leq$
3	0	0	114
5	0	0	230
1	0	0	78
1	0	0	48
1	0	0	54

(Le tabelle scritte omettono righe ridondanti tipo $0 \leq k$ con $k \geq 0$). La più stringente delle disequazioni della terza tabella consente a z di valere al massimo $z^* = 114/3 = 38$. Il problema ammette dunque ottimo finito. Con opportuni passaggi si ricava la soluzione ottima $x_1^* = 4$, $x_2^* = 10$.

4. **Scommettiamo che...** L'Interprovinciale F.C: deve giocare un'importante partita. I bookmaker inglesi danno la squadra vincente al 25%, perdente al 40%, e per il restante 35% optano per un pareggio. I bookmaker italiani, che hanno informazioni diverse, danno invece le seguenti percentuali: vincente al 40%, perdente al 35%, pareggio al 25%. Il portiere dell'Interprovinciale Giandionigi Serion, appassionato scommettitore, vuole giocarsi un euro simbolico ma per ovvie ragioni non può farlo direttamente. Incarica allora un suo amico dicendogli: gioca quest'euro con gli inglesi o gli italiani, decidi tu, ma non tutto sulla vittoria: metti x centesimi sul pareggio, s sulla sconfitta e solo v sulla vittoria. Quali sono i valori di x, s e v che massimizzano la vincita nell'ipotesi peggiore? Risolvete il problema col metodo del simplesso.

Soluzione analoga a quella del Gruppo A.

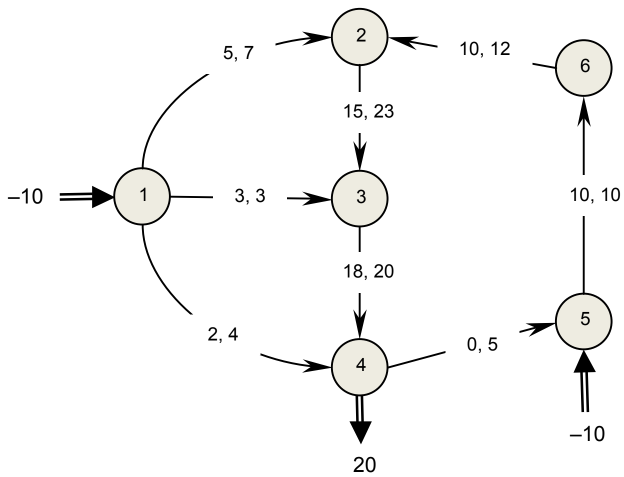
5. **Παντα ρει (tutto scorre, Eraclito, VI sec a.C.).** Nella rete conservativa di figura, i due numeri su ciascun arco misurano rispettivamente il flusso e la capacità dell'arco (tutte le soglie sono fissate a 0), mentre quelli associati ai nodi rappresentano la domanda e l'offerta.

A) Dite se la distribuzione di flusso indicata corrisponde a una soluzione di base.

B) In caso negativo, determinate una soluzione di base con opportune operazioni di pivot.

C) Calcolati i costi ridotti associati, stabilite poi se la soluzione di base trovata è ottima, o se è invece possibile tentare di migliorarla con un'operazione di pivot.

arco	costo per unità di flusso
12	2
13	10
14	2
23	1
34	1
45	3
56	6
62	4



Stessa soluzione del Gruppo A.