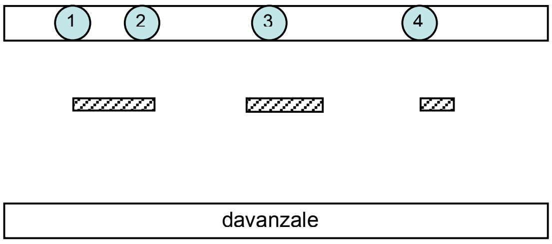
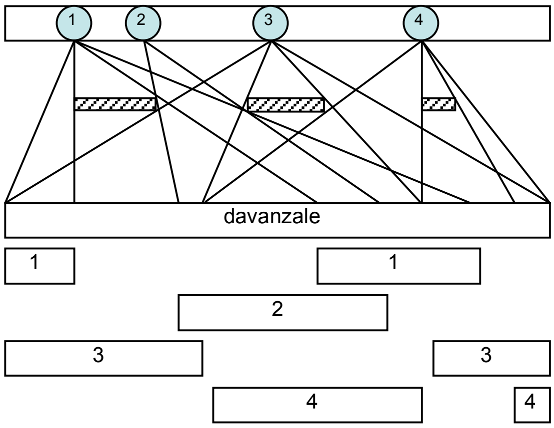
RICERCA OPERATIVA
prova scritta del 31 gennaio 2011

1. Prendere *n* piccioni con *k* fave

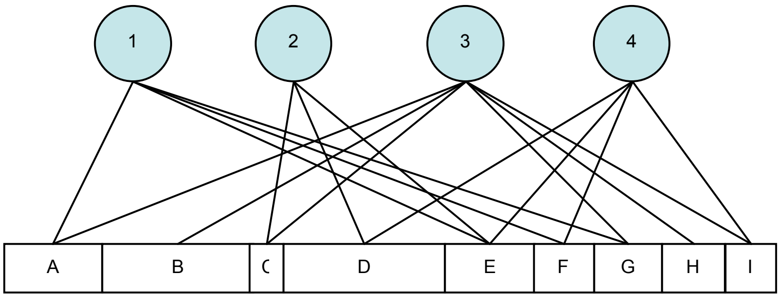
Di fronte alla finestra che dà sul mio balcone c'è un palazzo, sul cui cornicione si sono posati quattro piccioni. Tra il cornicione e il mio davanzale ci sono degli ostacoli visivi, per cui ciascun piccione vede solo alcuni tratti del davanzale. Su questi tratti vorrei mettere k fave in modo da attirare il maggior numero n di piccioni possibile. Formulare il problema come programmazione lineare intera.



Per formulare il problema occorre prima capire quali tratti di davanzale vede ciascun piccione: la risposta è fornita dalla figura.



Si può schematizzare la situazione tramite un grafo bipartito che metta in corrispondenza i piccioni con le intersezioni degli intervalli di visibilità: A = {1, 3}, B = {3}, C = {2, 3}, D = {2, 4}, E = {1, 2, 4}, …



Sia x_j una variabile di decisione 0-1 che, posta a 1, indica che una fava è stata messa sul nodo-intervallo j. Sia inoltre x_{ij} una variabile di decisione 0-1 che, posta a 1, indica che il piccione i si dirige sul nodo-intervallo j. Chiaramente il piccione lo farà solo se l'intervallo j contiene una fava, quindi

$$x_{ij} \le x_j \qquad \text{per ogni piccione } i \text{ e intervallo } j$$

D'altra parte sono disponibili solo k fave:

$$\textstyle\sum_j x_j \le k$$

e ogni piccione può andare su un solo tratto del balcone

$$\textstyle\sum_j x_{ij} \le 1 \qquad \text{per ogni piccione } i$$

L'obiettivo infine si scrive

$$\max \quad n = \textstyle\sum_i \sum_j x_{ij}$$

2. Prendere *n* piccioni con *k* fave

In base a un noto teorema, individuate nel problema formulato le sottomatrici dei coefficienti dei vincoli che, per immediata ispezione, risultano totalmente unimodulari.

Sono totalmente unimodulari le sottomatrici colorate e quella con il bordo tratteggiato. Tutte contengono infatti non più di due elementi diversi da 0 per riga o per colonna. Quella verde è matrice di incidenza di un grafo non orientato bipartito, le altre due di un grafo orientato.

																			A	E	F	G	C	D	H	I	B
x_{1A}	1																		1								
x_{1E}		1																		1							
x_{1F}			1																		1						
x_{1G}				1																		1					
x_{2C}					1																		1				
x_{2D}						1																		1			
x_{2E}							1													1							
x_{3A}								1											1								
x_{3B}									1																		1
x_{3C}										1													1				
x_{3G}											1											1					
x_{3H}												1													1		
x_{3I}													1													1	
x_{4D}														1										1			
x_{4E}															1					1							
x_{4F}																1					1						
x_{4I}																	1									1	
x_A	-1							-1										1									
x_B									-1									1									
x_C					-1					-1								1									
x_D						-1								-1				1									
x_E		-1					-1								-1			1									
x_F			-1													-1		1									
x_G				-1							-1							1									
x_H												-1						1									
x_I													-1				-1	1									

3. Risolvere con il metodo del simplesso il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & 2x_1 + x_2 + x_3 & & \\
 & x_1 + 2x_2 - x_3 & \leq & 6 \\
 & 3x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 9 \\
 & x_1 \qquad - 2x_3 & \leq & 8 \\
 & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Il problema è in forma canonica. Aggiungendo le variabili di slack si determina immediatamente una prima soluzione di base nella quale le slack assumono i valori dei termini noti e x_1, x_2, x_3 valgono 0. Poiché i costi ridotti sono positivi si può tentare di migliorare questa soluzione con un'operazione di pivot. Applicando il simplesso si determina in conclusione la soluzione ottima $x_1^* = 0$, $x_2^* = 5$, $x_3^* = 4$, di valore 9.

4. Scrivere il duale del problema precedente e, in base al risultato dell'esercizio 3 o ad altre considerazioni, stabilire se esso è vuoto, illimitato o se invece ammette ottimo finito.

Il duale è

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 6y_1 + 9y_2 + 8y_3 & & \\
 & y_1 + 3y_2 + y_3 & \geq & 2 \\
 & 2y_1 + y_2 & \geq & 1 \\
 & -y_1 + y_2 - 2y_3 & \geq & 1 \\
 & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

e, visto il risultato dell'esercizio 3, ammette ottimo finito.