RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**

prova scritta del 5 maggio 2010

1. Scrivere il duale del problema:

$$\begin{array}{llcl} \min & \frac{3}{2}x_1 + x_2 & & \\ & \frac{1}{2}x_1 \quad + x_3 & = & \frac{5}{2} \\ & x_2 - \frac{1}{3}x_3 & \le & -1 \\ & x_2 & \ge & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{llcl} \max & 5y_1 + 3y_2 & & \\ & y_1 & = & \frac{3}{2} \\ & y_2 & \ge & 0 \\ & 2y_1 + y_2 & = & 0 \end{array}$$

2. Dire se il vettore $\mathbf{w} = (\frac{19}{4}, -\frac{1}{2}, 1)$ è combinazione conica o convessa dei vettori

$$\mathbf{v}_1 = (2, -\tfrac{1}{2}, 1) \qquad \mathbf{v}_2 = (1, 0, \tfrac{3}{2}) \qquad \mathbf{v}_3 = (1/2, 0, -\tfrac{7}{2})$$

3. Risolvere con il metodo grafico il problema qui a fianco. Considerare poi la funzione obiettivo parametrica $x_1 + kx_2$, con k reale positivo. Per quali valori di k la soluzione trovata resta ottima?

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \ge -2 \\ & x_1 + 4x_2 \le 18 \\ & 2x_1 + x_2 \le 15 \\ & x_2 \ge 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima è $x_1 = 6$, $x_2 = 3$ di valore 12. La soluzione trovata resta ottima per $½ \le k \le 4$.

4. (solo prova di esonero, non fuori corso) Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvere il problema di programmazione lineare qui a fianco esibendo il valore della soluzione ottima (e delle variabili) qualora esista, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato.

$$\begin{array}{ll} \min & 4x_1 + x_2 \\ & 2x_1 - x_2 \ge 3 \\ & x_1 - 5x_3 \ge 2 \\ & x_i \ge 0 \quad i = 1,2,3 \end{array}$$

z	x_1	x_2	x_3	$\ge$
−1	4	1	0	0
1	−4	−1	0	0
0	2	−1	0	3
0	1	0	−5	2
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0

z	x_1	x_2	x_3	$\ge$
−1	4	1	0	0
1	−4	−1	0	0
0	2	−1	0	3
0	1	0	0	2
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0

z	x_1	x_2	$\ge$
0	0	0	0
−1	6	0	3
1	−4	0	0
0	2	0	3
0	1	0	2
0	1	0	0

z	x_1	$\ge$
1/2	0	3
1	0	6
1	0	8
1	0	0

Il valore minimo di z è 8. Una soluzione ottima è $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

5. Mangia sano e vivi meglio

Nel mulino che vorrei la produzione agricola è rigorosamente biologica. In una delle tenute della società, estesa per 100 ettari, si vuole pianificare la produzione del biennio barbabietole, cereali e leguminose con opportuna rotazione. Siano b_i, c_i, l_i e r_i il numero di ettari dedicati alle tre colture e, rispettivamente, posti a riposo nell'anno i (con i = 1, 2), R_b = 60, R_c = 90 e R_l = 7 le rese (quintali per ettaro) delle tre coltivazioni, e P_b = 30, P_c = 22 e P_l = 16 €/quintale i prezzi medi praticati sul mercato. Si formuli il problema di ripartire le colture in modo da massimizzare il profitto del biennio, tenendo presente che:

- per consentire al terreno di riacquisire i sali azotati, se nell'anno i un'estensione di terra è coltivata a barbabietola o cereali, nell'anno successivo dovrà essere coltivata a leguminose oppure posta a riposo;
- per motivi legati all'incentivazione comunitaria la terra coltivata a cereali non può eccedere il 10% del terreno complessivamente coltivato (il terreno a riposo si considera non coltivato);

$$\begin{array}{lll} \max & R_bP_b(b_1+b_2)+R_cP_c(c_1+c_2)+R_lP_l(l_1+l_2) & \\ & b_1+c_1 \le l_2+r_2 & \\ & b_2+c_2 \le l_1+r_1 & \\ & b_i+c_i+l_i+r_i = 100 & \\ & 10c_i \le b_i+c_i+l_i & i=1,2 \\ & b_i, c_i, l_i, r_i \ge 0 & i=1,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \max & 450(b_1+b_2)+495(c_1+c_2)+28(l_1+l_2) & \\ & b_1+c_1-l_2+r_2 \le 0 & \\ & b_2+c_2-l_1+r_1 \le 0 & \\ & b_i+c_i+l_i+r_i = 100 & \\ & 9c_i - b_i - l_i \le 0 & i=1,2 \\ & b_i, c_i, l_i, r_i \ge 0 & i=1,2 \end{array}$$

6. Sì, viaggiare (solo fuori corso, non prova di esonero)

La strada da percorrere è divisa in n tratti lunghi $s_1, \ldots, s_n$, e nel tratto i c'è il limite di velocità v_i. Alcuni tratti sono noiosi, altri panoramici. Devo arrivare entro T ore a destinazione, e vorrei farlo senza violare il codice; però vorrei anche minimizzare il tempo speso nei tratti noiosi. Come formulo il PL?
Supponiamo che i tratti di strada siano n = 4, con le lunghezze (km) e i limiti di velocità (km/h) della tabella seguente:

s_1	s_2	s_3	s_4
50	100	80	100
v_1	v_2	v_3	v_4
100	80	120	80

Il tempo a disposizione per percorrere tutto il tragitto è T = 4 ore, e i tratti noiosi sono il secondo e il quarto. Quanto tempo toccherà sopportarli in una soluzione ottima? Calcolatelo usando il metodo del simplesso. Suggerimento: servitevi del duale.

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i\in N} t_i & \\ & v_it_i \ge s_i & i=1,\ldots,n \\ & t_1+\ldots+t_n = T & \\ & t_1,\ldots,t_n \ge 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & t_2+t_4 \\ & 2t_1 \ge 1,\ 4t_2 \ge 5,\ 3t_3 \ge 2,\ 4t_4 \ge 5 \\ & t_1+t_2+t_3+t_4 = 4 \\ & t_1,\ldots,t_4 \ge 0 \end{array}$$

Dal momento che si richiede solo il valore raggiunto all'ottimo dalla funzione obiettivo, per ottenere più facilmente una forma canonica conviene servirsi del duale, che si scrive

$$\begin{array}{ll} \max & u_1+5u_2+2u_3+5u_4+4w-4z \\ & 2u_1 + w - z \le 0 \\ & 4u_2 + w - z \le 1 \\ & 3u_3 + w - z \le 0 \\ & 4u_4 + w - z \le 1 \\ & u_1,\ldots,u_4, w, z \ge 0 \end{array}$$

Indicando con y_i le variabili di slack si ha quindi la tabella canonica

u_1	u_2	u_3	u_4	w	z	y_1	y_2	y_3	y_4	
1	5	2	5	4	–4	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	–1	1	0	0	0	0
0	**4**	0	0	1	–1	0	1	0	0	1
0	0	3	0	1	–1	0	0	1	0	0
0	0	0	4	1	–1	0	0	0	1	1

Iterazioni successive dell'operazione di pivot forniscono

u_1	u_2	u_3	u_4	w	z	y_1	y_2	y_3	y_4	
1	0	2	5	$^{11}/_4$	$-{}^{11}/_4$	0	$-{}^{5}/_4$	0	0	$-{}^{5}/_4$
2	0	0	0	1	–1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	¼	– ¼	0	¼	0	0	¼
0	0	3	0	1	–1	0	0	1	0	0
0	0	0	**4**	1	–1	0	0	0	1	1

u_1	u_2	u_3	u_4	w	z	y_1	y_2	y_3	y_4	
1	0	2	0	3/2	– 3/2	0	– 5/4	0	– 5/4	– 5/2
2	0	0	0	1	–1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	¼	– ¼	0	¼	0	0	¼
0	0	**3**	0	1	–1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	¼	– ¼	0	0	0	¼	¼

u_1	u_2	u_3	u_4	w	z	y_1	y_2	y_3	y_4	
1	0	0	0	5/6	– 5/6	0	– 5/4	– 2/3	– 5/4	– 5/2
2	0	0	0	1	–1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	¼	– ¼	0	¼	0	0	¼
0	0	1	0	1/3	– 1/3	0	0	1/3	0	0
0	0	0	1	¼	– ¼	0	0	0	¼	¼

u_1	u_2	u_3	u_4	w	z	y_1	y_2	y_3	y_4	
0	0	0	0	1/3	– 1/3	0	– 5/4	– 2/3	– 5/4	– 5/2
1	0	0	0	½	– ½	½	0	0	0	0
0	1	0	0	¼	– ¼	0	¼	0	0	¼
0	0	1	0	1/3	– 1/3	0	0	1/3	0	0
0	0	0	1	¼	– ¼	0	0	0	¼	¼

u_1	u_2	u_3	u_4	w	z	y_1	y_2	y_3	y_4	
0	– 1/3	0	0	0	0	0	– 19/12	– 2/3	– 5/4	– 17/6
1	0	0	0	½	– ½	½	0	0	0	0
0	1	0	0	1	– 1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1/3	– 1/3	0	0	1/3	0	0
0	0	0	1	¼	– ¼	0	0	0	¼	¼

Nella migliore delle ipotesi i tratti noiosi verranno dunque inflitti al povero guidatore per 170 minuti, vale a dire 2 ore e 50.

RICERCA OPERATIVA **GRUPPO B**

prova scritta del 5 maggio 2010

1. Scrivere il duale del problema:

$$\begin{array}{llll} \min & -x_1 + {}^3\!/_2\, x_2 + {}^1\!/_2\, x_3 & & \\ & \quad\;\, - {}^1\!/_2\, x_2 + {}^1\!/_2\, x_3 & \le & 0 \\ & {}^1\!/_2\, x_1 + {}^3\!/_2\, x_2 & = & 1 \\ & x_1, x_3 & \ge & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \max & y_2 & \\ & y_2 & \le -2 \\ & y_1 + 3y_2 & = 3 \\ & y_1 & \ge 0 \end{array}$$

2. Dire se il vettore **w** = $(1, {}^1\!/_2, {}^3\!/_2)$ è combinazione conica o convessa dei vettori

$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$ $\qquad \mathbf{v}_2 = ({}^1\!/_2, {}^3\!/_2, {}^3\!/_2)$ $\qquad \mathbf{v}_3 = (2, 0, 3)$

3. Risolvere con il metodo grafico il problema qui a fianco. Considerare poi il primo vincolo parametrico $2x_1 + x_2 \ge k$, con k reale positivo, e stabilire se esistono valori di k per cui il punto (3,0) è soluzione ottima.

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 3x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \ge -4 \\ & -x_1 + 2x_2 \ge -3 \\ & 3x_1 + 5x_2 \le 31 \\ & x_1 \ge 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima è $x_1 = 0$, $x_2 = -{}^3\!/_2$ di valore $-{}^9\!/_2$. Per $k = 6$ il punto (3,0) è soluzione ottima.

4. (Solo prova di esonero, non fuori corso) Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvere il problema di programmazione lineare qui a fianco esibendo il valore della soluzione ottima (e delle variabili) qualora esista, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato.

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - 3x_2 \\ & 4x_1 + 2x_2 \le 1 \\ & -3x_1 + x_3 \le 2 \\ & x_i \ge 0 \quad i = 1,2,3 \end{array}$$

z	x_1	x_2	x_3	$\le$
−1	1	−3	0	0
1	−1	3	0	0
0	4	2	0	1
0	−3	0	1	2
0	−1	0	0	0
0	0	−1	0	0
0	0	0	−1	0

z	x_1	x_2	x_3	$\le$
−1	1	−3	0	0
1	−1	3	0	0
0	4	2	0	1
0	−3	0	0	2
0	−1	0	0	0
0	0	−1	0	0

z	x_1	x_2	$\le$
0	0	0	0
−1	7	0	3/2
0	−3	0	2
0	−1	0	0
0	4	0	1
1	−1	0	0

z	x_1	$\le$
−1	0	37/6
−1	0	3/2
6	0	3/2
0	0	11/4
0	0	1
4	0	1

Il valore minimo di z è ¼. Una soluzione ottima è $x_1 = ¼$, $x_2 = 0$, $x_3 = {}^{11}\!/_4$.

5. Mangia sano e vivi meglio

Nel mulino che vorrei la produzione agricola è rigorosamente biologica. In una delle tenute della società, estesa per 100 ettari, si vuole pianificare la produzione del biennio barbabietole, cereali e leguminose con opportuna rotazione. Siano b_i, c_i, l_i e r_i il numero di ettari dedicati alle tre colture e, rispettivamente, posti a riposo nell'anno i (con i = 1, 2), R_b = 60, R_c = 90 e R_l = 7 le rese (quintali per ettaro) delle tre coltivazioni, e P_b = 30, P_c = 22 e P_l = 16 €/quintale i prezzi medi praticati sul mercato. Si formuli il problema di ripartire le colture in modo da massimizzare il profitto del biennio, tenendo presente che:

- per consentire al terreno di riacquisire i sali azotati, se nell'anno i un'estensione di terra è coltivata a barbabietola o cereali, nell'anno successivo dovrà essere coltivata a leguminose ovvero posta a riposo;
- la terra coltivata a cereali non può eccedere il 10% del terreno complessivamente coltivato (il terreno a riposo si considera non coltivato);

$$\begin{array}{lll} \max & R_bP_b(b_1+b_2)+R_cP_c(c_1+c_2)+R_lP_l(l_1+l_2) & \\ & b_1+c_1 \le l_2+r_2 & \\ & b_2+c_2 \le l_1+r_1 & \\ & b_i+c_i+l_i+r_i = 100 & \\ & 10c_i \le b_i+c_i+l_i & i=1,2 \\ & b_i, c_i, l_i, r_i \ge 0 & i=1,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \max & 450(b_1+b_2)+495(c_1+c_2)+28(l_1+l_2) & \\ & b_1+c_1-l_2+r_2 \le 0 & \\ & b_2+c_2-l_1+r_1 \le 0 & \\ & b_i+c_i+l_i+r_i = 100 & \\ & 9c_i - b_i - l_i \le 0 & i=1,2 \\ & b_i, c_i, l_i, r_i \ge 0 & i=1,2 \end{array}$$

6. Sì, viaggiare (solo fuori corso, non prova di esonero)

La strada da percorrere è divisa in n tratti lunghi $s_1, \dots, s_n$, e nel tratto i c'è il limite di velocità v_i. Alcuni tratti sono noiosi, altri panoramici. Devo arrivare entro T ore a destinazione, e vorrei farlo senza violare il codice; però vorrei anche minimizzare il tempo speso nei tratti noiosi. Come formulo il PL?

Supponiamo che i tratti di strada siano $n = 4$, con le lunghezze (km) e i limiti di velocità (km/h) della tabella seguente:

s_1	s_2	s_3	s_4
50	100	80	100
v_1	v_2	v_3	v_4
100	80	120	80

Il tempo a disposizione per percorrere tutto il tragitto è $T = 4$ ore, e i tratti noiosi sono il secondo e il quarto. Quanto tempo toccherà sopportarli in una soluzione ottima? Calcolatelo usando il metodo del simplesso. Suggerimento: servitevi del duale.

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i\in N} t_i & \\ & v_i t_i \ge s_i & i=1,\dots,n \\ & t_1+\dots+t_n = T & \\ & t_1,\dots,t_n \ge 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & t_2+t_4 \\ & 2t_1 \ge 1,\ 4t_2 \ge 5,\ 3t_3 \ge 2,\ 4t_4 \ge 5 \\ & t_1+t_2+t_3+t_4 = 4 \\ & t_1,\dots,t_4 \ge 0 \end{array}$$

Dal momento che si richiede solo il valore raggiunto all'ottimo dalla funzione obiettivo, per ottenere più facilmente una forma canonica conviene servirsi del duale, che si scrive

$$\begin{array}{ll} \max & u_1+5u_2+2u_3+5u_4+4w-4z \\ & 2u_1 + w - z \le 0 \\ & 4u_2 + w - z \le 1 \\ & 3u_3 + w - z \le 0 \\ & 4u_4 + w - z \le 1 \\ & u_1,\dots,u_4, w, z \ge 0 \end{array}$$

Indicando con y_i le variabili di slack si ha quindi la tabella canonica

u_1	u_2	u_3	u_4	w	z	y_1	y_2	y_3	y_4	
1	5	2	5	4	–4	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	–1	1	0	0	0	0
0	**4**	0	0	1	–1	0	1	0	0	1
0	0	3	0	1	–1	0	0	1	0	0
0	0	0	4	1	–1	0	0	0	1	1

Iterazioni successive dell'operazione di pivot forniscono

u_1	u_2	u_3	u_4	w	z	y_1	y_2	y_3	y_4	
1	0	2	5	$^{11}/_4$	$-^{11}/_4$	0	$-^{5}/_4$	0	0	$-^{5}/_4$
2	0	0	0	1	–1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	¼	– ¼	0	¼	0	0	¼
0	0	3	0	1	–1	0	0	1	0	0
0	0	0	**4**	1	–1	0	0	0	1	1

u_1	u_2	u_3	u_4	w	z	y_1	y_2	y_3	y_4	
1	0	2	0	3/2	– 3/2	0	– 5/4	0	– 5/4	– 5/2
2	0	0	0	1	–1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	¼	– ¼	0	¼	0	0	¼
0	0	**3**	0	1	–1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	¼	– ¼	0	0	0	¼	¼

u_1	u_2	u_3	u_4	w	z	y_1	y_2	y_3	y_4	
1	0	0	0	5/6	– 5/6	0	– 5/4	– 2/3	– 5/4	– 5/2
2	0	0	0	1	–1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	¼	– ¼	0	¼	0	0	¼
0	0	1	0	1/3	– 1/3	0	0	1/3	0	0
0	0	0	1	¼	– ¼	0	0	0	¼	¼

u_1	u_2	u_3	u_4	w	z	y_1	y_2	y_3	y_4	
0	0	0	0	1/3	– 1/3	0	– 5/4	– 2/3	– 5/4	– 5/2
1	0	0	0	½	– ½	½	0	0	0	0
0	1	0	0	¼	– ¼	0	¼	0	0	¼
0	0	1	0	1/3	– 1/3	0	0	1/3	0	0
0	0	0	1	¼	– ¼	0	0	0	¼	¼

u_1	u_2	u_3	u_4	w	z	y_1	y_2	y_3	y_4	
0	– 1/3	0	0	0	0	0	– 19/12	– 2/3	– 5/4	– 17/6
1	0	0	0	½	– ½	½	0	0	0	0
0	1	0	0	1	– 1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1/3	– 1/3	0	0	1/3	0	0
0	0	0	1	¼	– ¼	0	0	0	¼	¼

Nella migliore delle ipotesi i tratti noiosi verranno dunque inflitti al povero guidatore per 170 minuti, vale a dire 2 ore e 50.