RICERCA OPERATIVA **GRUPPO B**

prova scritta del 22 gennaio 2009

1. Dite se il vettore (5/4, –1, 1) è combinazione affine, conica o convessa dei vettori (1/2, 0, 1), (–1, 2, 1) e (1/2, 1/2, –3).

Il vettore (5/4, –1, 1) è combinazione affine dei vettori (1/2, 0, 1), (–1, 2, 1) e (1/2, 1/2, –3) con coefficienti 3/2, –1/2 e 0.

2. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvete il seguente problema di programmazione lineare, esibendo la soluzione ottima (qualora esista) e il suo valore, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato.

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ & x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 2 \\ & x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	z	$\geq$
–2	–3	–1	1	0
1	–2	–1	0	2
0	1	3	0	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\geq$
0	–7	**–3**	1	4
0	–3	**–1**	1	0
0	1	**3**	0	1
0	1	**0**	0	0
0	0	**1**	0	0

x_2	x_3	z	$\geq$
–6	0	1	5
–7	0	1	4
–8	0	3	1
–3	0	1	0
1	0	0	0

x_2	z	$\geq$
0	1	5
0	1	4
0	3	1
0	1	0

Dall'ultima tabella si ottiene $z \geq 5$. Poiché il problema è di minimo sarà $z = 5$. Dalla penultima tabella sostituendo $z = 5$ si ottiene $x_2 = 0$. Dalla terzultima tabella si ottiene $x_3 = 1/3$ e dalla prima $x_1 = 7/3$.

3. Dato il seguente problema (P) di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ & -2x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \geq 2 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{aligned}$$

sia $\mathbf{y}$ = (5/6, 1/3) una soluzione ammissibile per il problema duale associato a (P). Scrivete il problema duale (D) di (P) e usando le condizioni di complementarità dite se $\mathbf{y}$ è una soluzione ottima di (D).

Il problema duale è:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3y_1 + 2y_2 \\ & y_1 - 2y_2 \le 2 \\ & -2y_1 + 2y_2 \le -1 \\ & y_1 + \frac{1}{2}y_2 \le 1 \\ & y_i \ge 0 \quad i = 1,2 \end{aligned}$$

Le condizioni di complementarità sono:

$(x_1 - 2x_2 + x_3 - 3)\, y_1 = 0$

$(-2x_1 + 2x_2 + 1/2x_3 - 2)\, y_2 = 0$

$(2 - y_1 + 2y_2)\, x_1 = 0$

$(-1 + 2y_1 - 2y_2)\, x_2 = 0$

$(1 - y_1 - 1/2y_2)\, x_3 = 0$

Sostituendo i valori $y_1 = 5/6$, $y_2 = 1/3$ si ottiene $x_1 = 0$, $x_2 = 1/6$ e $x_3 = 10/3$. Essendo **x** una soluzione ammissibile per il problema (P) si ha che **y** è soluzione ottima di (D).

5. Cronache marziane

Alfa, Beta e Gamma sono tre mercanti marziani che, per rifornire i propri negozi, si sono incontrati a fare affari su un pianeta interno di Betelgeuse. Alfa ha un bel carico di xilofoni, Beta un'astronave piena di ysotopi e Gamma può fornire un gran numero di zibaldoni. Dopo lunga contrattazione i tre si accordano come riportato nella tabella seguente, dove l'incrocio tra la riga *i* e la colonna *j* fornisce il numero di oggetti che *i* deve fornire a *j* in cambio di un oggetto fornito da *j* a *i*: ad esempio, in cambio di un ysotopo fornito da Beta, Alfa deve dargli 1,5 xilofoni (incrocio tra riga 1 e colonna 2), e in cambio di uno zibaldone fornito da Gamma, Alfa gli dovrà dare 0,4 xilofoni (incrocio tra riga 1 e colonna 3). La riga sotto la tabella indica il numero di xilofoni, ysotopi e zibaldoni stivati dai tre marziani nelle rispettive astronavi.

	Alfa	*Beta*	*Gamma*
Alfa		1,5	0,4
Beta	0,8		1,4
Gamma	1,3	0,5	
disponibilità	3000	2000	3000
	Xilofoni	*Ysotopi*	*Zibaldoni*

Ciascun marziano può ovviamente fornire agli altri due un quantitativo di oggetti non superiore alla propria disponibilità. Alfa si chiede se riuscirà a scambiare tutta la propria merce. Formulate il problema come programmazione lineare usando variabili x_{ij} che indicano il numero di oggetti che *i* fornisce a *j* e mostrate come portarlo in forma canonica mediante il simplesso, avviando il calcolo di una prima soluzione di base.

Con la notazione suggerita è immediato scrivere

$$\begin{aligned} \max \quad & x_{\alpha\beta} + x_{\alpha\gamma} \\ & x_{\alpha\beta} + x_{\alpha\gamma} = 1{,}5x_{\beta\alpha} + 0{,}4x_{\gamma\alpha} \le 3000 \\ & x_{\beta\alpha} + x_{\beta\gamma} = 0{,}8x_{\alpha\beta} + 1{,}4x_{\gamma\beta} \le 2000 \\ & x_{\gamma\alpha} + x_{\gamma\beta} = 1{,}3x_{\alpha\gamma} + 0{,}5x_{\beta\gamma} \le 3000 \\ & x_{\alpha\beta}, x_{\alpha\gamma}, x_{\beta\alpha}, x_{\beta\gamma}, x_{\gamma\alpha}, x_{\gamma\beta} \ge 0 \end{aligned}$$

Il problema si pone facilmente in forma standard aggiungendo 6 variabili di slack $w_1, \ldots, w_6 \ge 0$ e risolvendo un problema ausiliario nel quale si minimizza $w_4 + w_5 + w_6$:

$x_{\alpha\beta}$	$x_{\alpha\gamma}$	$x_{\beta\alpha}$	$x_{\beta\gamma}$	$x_{\gamma\alpha}$	$x_{\gamma\beta}$	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	
–2	3	5	–5	–6	4	0	0	0	0	0	0	0
0	0	15	0	4	0	1	0	0	0	0	0	30000
8	0	0	0	0	14	0	1	0	0	0	0	20000
0	13	0	5	0	0	0	0	1	0	0	0	30000
10	10	–15	0	–4	0	0	0	0	1	0	0	0
–8	0	10	10	0	–14	0	0	0	0	1	0	0
0	–13	0	–5	**10**	10	0	0	0	0	0	1	0

La base iniziale è degenere. Eseguendo un'operazione di pivot in quinta colonna si fa uscire w_6 dalla base:

$x_{\alpha\beta}$	$x_{\alpha\gamma}$	$x_{\beta\alpha}$	$x_{\beta\gamma}$	$x_{\gamma\alpha}$	$x_{\gamma\beta}$	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	
–2	–4,8	5	–2	0	10	0	0	0	0	0	0,6	0
0	5,2	15	2	0	–4	1	0	0	0	0	–0,4	30000
8	0	0	0	0	14	0	1	0	0	0	0	20000
0	13	0	5	0	0	0	0	1	0	0	0	30000
10	15,2	–15	–2	0	4	0	0	0	1	0	0,4	0
–8	0	10	10	0	–14	0	0	0	0	1	0	0
0	–1,3	0	–0,5	1	1	0	0	0	0	0	0,1	0

Un'analoga operazione in prima colonna fa uscire w_4:

$x_{\alpha\beta}$	$x_{\alpha\gamma}$	$x_{\beta\alpha}$	$x_{\beta\gamma}$	$x_{\gamma\alpha}$	$x_{\gamma\beta}$	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	
0	–1,76	2	–2,4	0	10,8	0	0	0	0,2	0	0,68	0
0	5,2	15	2	0	–4	1	0	0	0	0	–0,4	30000
0	–12,16	12	1,6	0	10,8	0	1	0	–0,8	0	–0,32	20000
0	13	0	5	0	0	0	0	1	0	0	0	30000
1	1,52	–1,5	–0,2	0	0,4	0	0	0	0,1	0	0,04	0
0	12,16	–2	**8,4**	0	–10,8	0	0	0	0,8	1	0,32	0
0	–1,3	0	–0,5	1	1	0	0	0	0	0	0,1	0

Infine eseguendo un pivot in quarta colonna si può far uscire dalla base la variabile w_4 ottenendo una prima soluzione di base per il problema originale (i calcoli sono piuttosto complicati e non vengono riprodotti). A partire dalla base ottenuta si può ottenere la soluzione ottima reinserendo la funzione obiettivo iniziale con coefficienti 1 nelle prime due colonne e 0 altrove. Risolvendo si viene a sapere che Alfa potrebbe piazzare tutti e 3000 i suoi xilofoni vendendone 2500 a Beta e i rimanenti a Gamma. In questo modo anche Beta riuscirebbe a disfarsi di tutti i suoi ysotopi: 1800 andrebbero ad Alfa e gli altri 200 a Gamma. Quest'ultimo invece riuscirebbe a vendere solo 750 dei suoi 3000 zibaldoni: tutti ad Alfa e nessuno a Beta.

6. **Due reti**

Due ditte devono costruire una rete raccogliendo un insieme N di nodi in due sottoreti complete. Per ogni coppia di nodi i, j è noto il costo c_{ij} sostenuto per congiungerli con un link. Formulare come programmazione lineare 0-1 il problema di assegnare a ciascuna ditta la realizzazione di una sottorete in modo che la differenza tra le lunghezze complessive dei link usati nelle due sottoreti sia minore possibile.

Si possono usare le seguenti variabili di decisione 0-1:

$x_i = 1$ se e solo se il nodo i è assegnato alla ditta 1

$x_{ij} = 1$ se e solo se il link ij è realizzato dalla ditta 1

$y_{ij} = 1$ se e solo se il link ij è realizzato dalla ditta 2

Con questa notazione i vincoli si scrivono:

$x_{ij} \leq (x_i + x_j)/2$ se non si assegnano entrambi i nodi alla ditta 1, questa non li collega

$x_{ij} \geq x_i + x_j - 1$ se si assegnano entrambi i nodi alla ditta 1, questa li deve collegare

$y_{ij} \leq 1 - (x_i + x_j)/2$ se il nodo i (o j) è assegnato alla ditta 1, la ditta 2 non lo collega a j (a i)

$y_{ij} \geq 1 - x_i - x_j$ se nessuno dei due nodi è assegnato alla ditta 1, la ditta 2 li deve collegare

Si noti che la seconda coppia di vincoli si ottiene dalla prima sostituendo $(1 - x_i)$ a x_i e $(1 - x_j)$ a x_j. La differenza tra i costi di collegamento, in valore assoluto, è pari a

$$D = \left|\sum_{i,j\in N} c_{ij}\, x_{ij} - \sum_{i,j\in N} c_{ij}\, y_{ij}\right|$$

Minimizzare tale valore corrisponde a minimizzare la variabile reale D con gli ulteriori vincoli

$$D \geq \sum_{i,j\in N} c_{ij}\, x_{ij} - \sum_{i,j\in N} c_{ij}\, y_{ij} \qquad D = \sum_{i,j\in N} c_{ij}\, y_{ij} - \sum_{i,j\in N} c_{ij}\, x_{ij}$$