RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**

prova scritta del 22 gennaio 2009

1. Dite se il vettore (5/2, 1, –13/2) è combinazione affine, conica o convessa dei vettori (1/2, 1/2, –3), (0, –1, 2) e (–3/2, 0, 1/2).

Il vettore (–5/2, 1, –13/2) è combinazione affine dei vettori (1/2, 1/2, –3), (0, –1, 2) e (–3/2, 0, 1/2) con coefficienti 2, 0 e –1.

2. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvete il seguente problema di programmazione lineare, esibendo la soluzione ottima (qualora esista) e il suo valore, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato.

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ & x_1 + x_2 \le 10 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \le 5 \\ & x_i \ge 0 \quad i = 1,2,3 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	z	$\ge$
3	2	**–1**	–1	0
–1	–1	**0**	0	–10
–1	–2	**1**	0	–5
1	0	**0**	0	0
0	1	**0**	0	0
0	0	**1**	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\ge$
2	0	0	–1	–5
3	2	0	–1	0
–1	–1	0	0	–10
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0

x_1	x_2	z	$\ge$
0	**–2**	–1	–25
0	**–1**	–1	–30
0	**–1**	0	–10
0	**1**	0	0

x_2	z	$\ge$
0	–1	–25
0	–1	–30
0	0	–10

Dall'ultima tabella si ottiene $z \le 25$. Poiché il problema è di massimo sarà $z = 25$. Dalla penultima tabella sostituendo $z = 25$ si ottiene $x_2 = 0$. Dalla terzultima tabella si ottiene $x_1 = 10$ e dalla prima $x_3 = 5$.

3. Dato il seguente problema (P) di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 1 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 1/2 \\ & x_i \ge 0 \quad i = 1,2,3 \end{aligned}$$

sia **y** = (0, 3/2) una soluzione ammissibile per il problema duale associato a (P). Scrivete il problema duale (D) di (P) e usando le condizioni di complementarità dite se **y** è una soluzione ottima di (D).

Il problema duale è:

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + \frac{1}{2} y_2 \\ & 2y_1 + y_2 \ge 1 \\ & 4y_1 + 3y_2 \ge 2 \\ & 2y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ & y_i \ge 0 \quad i = 1,2 \end{aligned}$$

Le condizioni di complementarità sono:

$(1 - 2x_1 - 4x_2 - 2x_3)\, y_1 = 0$

$(1/2 - x_1 - 3x_2 - 2x_3)\, y_2 = 0$

$(2y_1 + y_2 - 1)\, x_1 = 0$

$(4y_1 + 3y_2 - 2)\, x_2 = 0$

$(2y_1 + 2y_2 - 3)\, x_3 = 0$

Sostituendo i valori $y_1 = 0$, $y_2 = 3/2$ si ottiene $x_1^* = x_2^* = 0$ e $x_3^* = 1/4$. Essendo $\mathbf{x}^*$ una soluzione ammissibile per il problema (P) si ha che $\mathbf{y}$ è soluzione ottima di (D).

5. Befana sana

Ho chiesto le caramelle alla Befana, ma non vorrei sentirmi male. Il dietologo dice che non dovrei eccedere 30 grammi di zucchero, 20 di glucosio 50 di panna e 50 di miele al giorno. Rispondendo a una mia e-mail, la Befana mi ha detto che per le mie caramelle ha usato le seguenti ricette (tutte le quantità sono espresse in grammi, nell'ultima riga si legge il quantitativo di caramelle ottenuto con ciascuna ricetta).

	ricetta 1	**ricetta 2**	**ricetta 3**
zucchero	200	200	50
glucosio			125
panna	200	100	
miele	100		100
caramelle ottenute	**200**	**100**	**250**

Vorrei avere caramelle per tutto l'anno mangiandone il più possibile al giorno e mantenendomi nei limiti di quel menagramo del dietologo. Quante di ciascun tipo ne devo chiedere alla Befana? Datemi una mano: formulate un PL e risolvetelo col metodo del simplesso.

1. Bisogna anzitutto calcolare il contenuto di ciascun ingrediente in una caramella: per questo basta dividere ciascuna colonna della tabella per il numero di caramelle a cui si riferisce la ricetta corrispondente. Si ottiene

grammi di ingrediente per caramella

ingrediente	ricetta 1	ricetta 2	ricetta 3
zucchero	1	2	0,2
glucosio	0	0	0,5
panna	1	1	0
miele	0,5	0	0,4

2. Indicando con x_j il numero di caramelle di tipo j consumate in un giorno, con a_{ij} il contenuto di ingrediente i in una caramella di tipo j, e con b_i la quantità massima di ingrediente i che si può assumere in un giorno il problema si formula quindi

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 + x_3 \\ & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \le b_i \\ & \quad (\text{per } i = 1, \ldots, 4) \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \max & x_1 + x_2 + x_3 & & \\ & 5x_1 + 10x_2 + x_3 & \le & 150 \\ & x_3 & \le & 40 \\ & x_1 + x_2 & \le & 50 \\ & x_1 + 2x_3 & \le & 500 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 & \ge & 0 \end{array}$$

3. Il problema si pone facilmente in forma standard aggiungendo 4 variabili di slack $w_1, \ldots, w_4$. La prima tabella canonica si scrive quindi:

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	
1	1	1	0	0	0	0	0
5	10	1	1	0	0	0	150
0	0	1	0	1	0	0	40
1	1	0	0	0	1	0	50
1	0	2	0	0	0	1	500

Eseguendo un'operazione di pivot in prima colonna si ricava

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	
–1	–2	4/5	–1/5	0	0	0	–30
1	2	1/5	1/5	0	0	0	30
0	0	**1**	0	1	0	0	40
0	–1	–1/5	–1/5	0	1	0	20
0	–2	–1/5	–1/5	0	0	1	470

Eseguendo poi un'operazione di pivot in terza colonna si ha

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	
–1	–2	0	–1/5	–4/5	0	0	–62
1	2	0	1/5	–1	0	0	22
0	0	1	0	1	0	0	40
0	–1	0	–1/5	1/5	1	0	28
0	–2	0	–1/5	1/5	0	1	478

La tabella è chiaramente ottima e corrisponde a una soluzione nella quale si consumano 22 caramelle del primo tipo e 40 del terzo ogni giorno. Fino alla prossima Befana fanno 22·365 = 8.030 del primo tipo e 40·365 = 14.600 del terzo: in totale, 22.630 caramelle – una calza bella pesante. Io cambierei dietologo…

6. Due reti

Due ditte devono costruire una rete raccogliendo un insieme N di nodi in due sottoreti complete. Per ogni coppia di nodi i, j è noto il costo c_{ij} sostenuto per congiungerli con un link. Formulare come programmazione lineare 0-1 il problema di assegnare a ciascuna ditta la realizzazione di una sottorete in modo che la differenza tra le lunghezze complessive dei link usati nelle due sottoreti sia minore possibile.

Si possono usare le seguenti variabili di decisione 0-1:

$x_i = 1$ se e solo se il nodo i è assegnato alla ditta 1

$x_{ij} = 1$ se e solo se il link ij è realizzato dalla ditta 1

$y_{ij} = 1$ se e solo se il link ij è realizzato dalla ditta 2

Con questa notazione i vincoli si scrivono:

$x_{ij} \le (x_i + x_j)/2$ se non si assegnano entrambi i nodi alla ditta 1, questa non li collega

$x_{ij} \ge x_i + x_j - 1$ se si assegnano entrambi i nodi alla ditta 1, questa li deve collegare

$y_{ij} \le 1 - (x_i + x_j)/2$ se il nodo i (o j) è assegnato alla ditta 1, la ditta 2 non lo collega a j (a i)

$y_{ij} \ge 1 - x_i - x_j$ se nessuno dei due nodi è assegnato alla ditta 1, la ditta 2 li deve collegare

Si noti che la seconda coppia di vincoli si ottiene dalla prima sostituendo $(1 - x_i)$ a x_i e $(1 - x_j)$ a x_j. La differenza tra i costi di collegamento, in valore assoluto, è pari a

$$D = \left|\sum_{i,j\in N} c_{ij} x_{ij} - \sum_{i,j\in N} c_{ij} y_{ij}\right|$$

Minimizzare tale valore corrisponde a minimizzare la variabile reale D con gli ulteriori vincoli

$$D \ge \sum_{i,j\in N} c_{ij} x_{ij} - \sum_{i,j\in N} c_{ij} y_{ij} \qquad D = \sum_{i,j\in N} c_{ij} y_{ij} - \sum_{i,j\in N} c_{ij} x_{ij}$$