RICERCA OPERATIVA
prova scritta del 22 novembre 2007

Cognome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|
Nome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|
Matricola: |__|__|__|__|__|__|

Rispondere alle seguenti domande marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate).
Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata vale –1 punto.

1. Siano m e n due interi non negativi tali che $m \leq n$. Sia U un insieme di n elementi e $\mathfrak{I} = \{ X \subseteq U : |X| \leq m\}$. Dire se la coppia $(U,\mathfrak{I})$:

[A] è un matroide
[B] è subclusiva ma non gode della proprietà di scambio
[C] non è subclusiva ma gode della proprietà di scambio

2. Il vettore (3, 2, –2) è combinazione
[A] affine
[B] convessa
[C] conica
dei vettori (–1, 0, 2), (1, 1, 0) e (–2, 1, –2).

3. Scrivere il duale del problema:

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & 2x_1 - 3x_3 & & \\
 & x_1 + x_2 - x_3 & \leq & 5 \\
 & x_1 + 2x_3 & \geq & 2 \\
 & 4x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 8 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Soluzione:

$$
\begin{array}{ll}
\min & 5y_1 - 2y_2 + 8y_3 \\
 & y_1 - y_2 + 4y_3 \geq 2 \\
 & y_1 - 2y_3 \geq 0 \\
 & -y_1 - 2y_2 + y_3 = -3 \\
 & y_1, y_2 \geq 0
\end{array}
$$

Risolvere il seguente problema. La soluzione viene valutata fino a 4 punti.

1. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare, esibendo il valore della soluzione ottima (e delle variabili) qualora esista, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato.

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & 2x_1 + 3x_3 & & \\
 & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 5 \\
 & 2x_1 - x_2 & \geq & 2 \\
 & 4x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 8 \\
 & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Soluzione:

x_1	x_2	x_3	z	$\geq$
2	0	3	–1	0
–1	–1	–1	0	–5
2	–1	0	0	2
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\geq$
2	0	3	–1	0
–1	0	–1	0	–5
2	0	0	0	2
1	0	0	0	0
0	0	1	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\geq$
–1	0	0	–1	–15
2	0	0	0	2
1	0	0	0	0
–1	0	0	0	–5

x_1	x_2	x_3	z	$\geq$
0	0	0	–2	–28
0	0	0	0	–8
0	0	0	–1	–15
0	0	0	0	–5

Il valore massimo di z è 14. Le variabili assumono i seguenti valori: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 4$.

Risolvere il seguente problema. La soluzione viene valutata fino a 6 punti.

Topolino, iscrittosi alla rinomatissima scuola del celebre Mago Bianco Alakazab Balakazam, deve preparare come tesina un filtro magico per ripulire lo smalto delle unghie. Avendo però fatto le ore piccole il giorno prima appresso a Minni è un po' confuso. Si ricorda infatti gli ingredienti, che sono 1) code di rospo 2) ali di pipistrello, ma non ricorda le dosi. In un vecchio librone nascosto dietro uno scheletro riesce però a decifrare antichi caratteri aramaici che sembrano dire quanto segue:

1. l'efficacia del filtro cresce tre volte con ogni grammo dell'ingrediente 1 e decresce due volte con ogni grammo dell'ingrediente 2
2. il rischio che il filtro esploda cresce con la percentuale dell'ingrediente 1 nella mistura

Il nostro eroe vorrebbe preparare 100 grammi di composto massimizzandone l'efficacia e contenendo il rischio di esplosioni entro il 10%. Potreste aiutarlo risolvendo col simplesso un opportuno problema di PL?

Siano x_1 e x_2 le quantità di ingrediente 1 e ingrediente 2 necessarie a preparare il quantitativo di filtro richiesto. Si ha

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 & = 100 \\ x_1/(x_1 + x_2) & \leq 1/10 \end{array}$$

e l'efficacia del filtro è $f(x_1, x_2) = 3x_1 - 2x_2$. In definitiva il problema si formula quindi:

$$\begin{array}{lrcl} \max & 3x_1 - 2x_2 & & \\ & x_1 + x_2 & = & 100 \\ & 9x_1 - x_2 & \leq & 0 \\ & x_1,\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

e in forma standard si riscrive:

$$\begin{array}{lrcl} \max & 3x_1 - 2x_2 & & \\ & x_1 + x_2 & = & 100 \\ & 9x_1 - x_2 + w & = & 0 \\ & x_1,\ x_2,\ w & \geq & 0 \end{array}$$

da cui, sostituendo la seconda equazione con la somma della prima e della seconda si ricava:

$$\begin{array}{lrcl} \max & 3x_1 - 2x_2 & & \\ & x_1 + x_2 & = & 100 \\ & 10x_1 \qquad + w & = & 100 \\ & x_1,\ x_2,\ w & \geq & 0 \end{array}$$

La tabella iniziale del simplesso ha quindi il seguente aspetto:

x_1	x_2	w	
3	–2	0	0
1	1	0	100
10	0	1	100

Non si tratta ancora di una tabella canonica, in quanto i coefficienti in base non sono tutti nulli. A ciò si rimedia rapidamente sommando alla riga 0 la riga del primo vincolo moltiplicata per 2:

x_1	x_2	w	
5	0	0	200
1	1	0	100
10	0	1	100

Il coefficiente di costo ridotto della variabile x_1 è > 0, quindi si può pensare di operare con un pivot in prima colonna. La riga di pivot è chiaramente quella corrispondente al secondo vincolo. Dividendola per 10, sottraendola alla riga precedente e, successivamente, moltiplicandola per 5 e sottraendola alla riga 0, si ottiene la nuova tabella

x_1	x_2	w	
0	0	–5/10	150
0	1	–1/10	90
1	0	1/10	10

Questa tabella è chiaramente ottima, e fornisce la soluzione $x_1^* = 10$, $x_2^* = 90$. Il valore della soluzione, –150, fa pensare a un filtro non riuscito. Povero Topolino…