

Richiami di teoria dei grafi

Definizioni di base, grafi simmetrici, asimmetrici e antisimmetrici, grafo complemento, grafo completo e grafo vuoto, isomorfismo. Sottografi (indotti), cammini, catene e percorsi, connessione debole e forte, componenti connesse, grado, teorema del grado, numero di nodi con grado dispari in un grafo simmetrico. Insieme stabile e clique. Numero di clique e numero di stabilità. Diametro di un grafo simmetrico. Colorazione di un grafo simmetrico. Numero cromatico. Grafi k-colorabili. Grafi bipartiti e loro caratterizzazione. Matching. Esempi. Grafi bipartiti completi. Grafi privi di cicli: alberi e foreste. Grafi d-regolari: matching e grafi cubici. Grafi intersezione: grafi intervallo e loro proprietà. Grafi cordali. Colorazione e numero di clique di un grafo intervallo. Grafi intersezione: grafi intervallo d-dimensionali. Grafo di adiacenza (edge-graph) di un grafo simmetrico. Numero di clique e di stabilità di un grafo di adiacenza.

Richiami di algebra lineare

Vettori, scalari e operazioni elementari. Prodotto scalare, combinazione lineare, affine, conica e convessa. Chiusura rispetto alle operazioni di combinazione. Dipendenza e indipendenza lineare e affine. Semispazi chiusi, poliedri e loro rappresentazione algebrica. Sistemi di disequazioni lineari e loro soluzione. Teorema e metodo di Fourier-Motzkin. Basi per un insieme di vettori. Teorema di rappresentazione. Teorema di sostituzione (Steinitz).

Problemi combinatorici e di ottimizzazione combinatoria

Algoritmo universale e sua complessità. Problemi subclusivi, superclusivi, né subclusivi né superclusivi. Esempi: zaino, edge-cover, insieme stabile, albero ricoprente, matching (perfetto). Algoritmo ingordo: pseudocodifica per problemi subclusivi e superclusivi. Ammissibilità della soluzione. Proprietà di scambio e sue implicazioni sulla cardinalità degli insiemi massimali. Convergenza dell'algoritmo ingordo a una soluzione ottima. Teorema di Rado, matroidi. Matroide banale, matroide grafico; assegnamenti e matroide partizione. Matroide vettoriale.

Modelli di programmazione lineare e lineare intera

Riformulazione di problemi di ottimizzazione combinatoria in termini di programmazione lineare 0-1. Esempi: clique, insieme stabile, node-cover, colorazione, problemi dell'(s, t)-cammino minimo e del commesso viaggiatore e loro riformulazione in termini di programmazione lineare 0-1. Problemi di programmazione lineare. Esempi: problema della dieta, ottimizzazione di un processo di produzione, problemi max-min e giochi a somma zero, gestione ottima di un portafoglio di titoli, ottimizzazione di un palinsesto televisivo.

Teoria della dualità e teoremi dell'alternativa

Teorema di Gale, Lemma di Farkas, esempi. Teorema di dualità forte. Duale di un problema di PL in forma standard. Proprietà del problema duale: reciprocità e dominanza. Condizioni di ottimalità primale e duale, ortogonalità. Costruzione del duale di un problema di PL generico. Formulazione del duale di un problema di PL. Interpretazione del problema duale. Prezzo implicito delle risorse. Aspetti geometrici della programmazione lineare. Direzioni di un poliedro: cono di recessione e sue proprietà. Teorema di Weyl (enunciato). Esempi. Teorema fondamentale della programmazione lineare.

Il metodo del semplice

Basi e soluzioni (ammissibili) di base; problemi equivalenti; forma e tabella canonica; criteri di ottimalità e illimitatezza. Fase II del metodo del semplice: tabella canonica e operazione di pivot, miglioramento della base corrente. Fase I del metodo del semplice: calcolo della prima base tramite problema ausiliario. Applicazioni alla

programmazione lineare intera: rilassamento lineare, calcolo di limitazioni inferiori/superiori tramite simplesso, cenni sui metodi di branch-and-bound.