

Rispondere alle seguenti domande marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate). Una risposta esatta vale 2 punti, una sbagliata vale -1 punto.

1. Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Un albero ricoprente G corrisponde a
 - (A) una foresta connessa
 - (B) una foresta massimale
 - (C) una foresta massimale connessa
 (infatti un sottografo di G che sia una foresta connessa – cioè un albero – non è necessariamente ricoprente; d'altra parte se G non è connesso, un sottografo massimale di G che sia una foresta non è connesso e quindi non è un albero)
2. Sia I un intervallo limitato di $\mathbb{R}^2$ e indichiamo con V l'insieme dei punti di I con coordinate intere. Sia inoltre F l'insieme dei segmenti di retta aventi per estremi punti di V della forma $(x, y), (u, y)$ con $|x - u| = 1$, oppure della forma $(x, y), (x, u)$ con $|y - u| = 1$. Dato $E \subseteq F$, il grafo $G = (V, E)$
 - (A) è privo di cicli per ogni E
 - (B) è bipartito per ogni E
 (infatti contiene solo cicli con un numero pari di archi)
 - (C) non è bipartito per ogni E

Risolvere i seguenti esercizi.

3. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, si determini una soluzione ottima del problema

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + x_2 \\ & x_1 - 3x_2 \leq -1 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \end{aligned}$$

Si tratta di impostare il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq z \\ -x_1 + 3x_2 &\geq 1 \\ x_1 - x_2 &\geq -2 \end{aligned}$$

eliminando in successione le variabili x_1 e x_2 , poi determinando il minimo valore di z compatibile con i vincoli ottenuti, infine risalendo ai valori ottimi di x_1 e x_2 .

Tabella iniziale

z	x_1	x_2	$>$
0	-1	3	1
0	1	-1	-2
1	-3	-1	0

Soluzione ottima:

$$\begin{aligned} x_1^* &= -5/2 \\ x_2^* &= -1/2 \end{aligned}$$

4. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, determinare il poliedro che rappresenta l'involucro affine dei punti $(-3, 0, -1), (1, -2, 0), (1, -1, 2)$.

Detto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un generico vettore dell'involucro conico dei punti dati deve aversi

$$\begin{aligned} x_1 &= -3l_1 + l_2 + l_3 \\ x_2 &= -2l_2 - l_3 \\ x_3 &= -l_1 + 2l_3 \\ l_1 + l_2 + l_3 &= 1 \end{aligned}$$

da cui, sostituendo $l_3 = 1 - l_1 - l_2$, si ottiene il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{array}{rcll}
-x_1 & -4l_1 & \leq & -1 \\
x_1 & +4l_1 & \leq & 1 \\
-x_2 & +l_1 - l_2 & \leq & 1 \\
x_2 & -l_1 + l_2 & \leq & -1 \\
-x_3 & -3l_1 - 2l_2 & \leq & -2 \\
x_3 & +3l_1 + 2l_2 & \leq & 2
\end{array}$$

Bisogna ora proiettare il poliedro descritto dal sistema precedente nello spazio $l_1 = l_2 = 0$. La proiezione eseguita eliminando la variabile l_2 consente di minimizzare il numero di righe del sistema risultante. Indicando in giallo le righe dell'insieme R^+ e in azzurro quelle dell'insieme R^- , ed eliminando le righe nulle (evidentemente ridondanti) si ha successivamente:

l_1	l_2	x_1	x_2	x_3	$\leq$
-4	0	-1	0	0	-1
4	0	1	0	0	1
1	-1	0	-1	0	1
-1	1	0	1	0	-1
-3	-2	0	0	-1	-2
3	2	0	0	1	2

l_1	l_2	x_1	x_2	x_3	$\leq$
-4	0	-1	0	0	-1
4	0	1	0	0	1
-5	0	0	2	-1	4
5	0	0	-2	1	-4

l_1	l_2	x_1	x_2	x_3	$\leq$
0	0	-5	-8	4	-21
0	0	5	8	-4	21

In conclusione l'involucro affine risulta costituito da tutti i punti di $\mathbb{R}^3$ che verificano l'equazione

$$5x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 21.$$

Risolvere il seguente esercizio. La soluzione verrà valutata fino a 5 punti.

5. Il tempio maledetto

Nei sotterranei di un antico tempio nell'isola di Java Indiana Jones ha trovato un manoscritto con le seguenti formule arcane:

$$\min \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq y_1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq y_2$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq y_3$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq y_4$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} \leq y_5$$

$$x_{16} + x_{26} + x_{36} \leq y_6$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} \geq 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} \geq 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} \geq 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} \geq 1$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} \geq 1$$

$$x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{66} \geq 1$$

$$x_{21} + x_{31} + x_{51} \leq y_1$$

$$x_{22} + x_{32} + x_{52} \leq y_2$$

$$x_{23} + x_{33} + x_{53} \leq y_3$$

$$x_{24} + x_{34} + x_{54} \leq y_4$$

$$x_{25} + x_{35} + x_{55} \leq y_5$$

$$x_{26} + x_{36} + x_{56} \leq y_6$$

$$x_{11} + x_{61} \leq y_1$$

$$x_{12} + x_{62} \leq y_2$$

$$x_{13} + x_{63} \leq y_3$$

$$x_{14} + x_{64} \leq y_4$$

$$x_{15} + x_{65} \leq y_5$$

$$x_{16} + x_{66} \leq y_6$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\}, y_k \in \{0, 1\}$$

Riferire questi strani geroglifici a un qualcosa di sensato non sembra facile. Cosa mai rappresenteranno? Forse un problema di ottimizzazione combinatoria definito su qualche grafo? Se sì, qual è la struttura del problema? Descrivetela qui sotto, indicando anche una soluzione ammissibile.

I geroglifici rappresentano un problema di colorazione dei vertici di un grafo simmetrico. Le variabili possono essere così interpretate:

$$\begin{array}{ll} y_k = 1 & \text{se il } k\text{-esimo colore è utilizzato} \\ y_k = 0 & \text{se il } k\text{-esimo colore non è utilizzato} \\ \\ x_{jk} = 1 & \text{se il nodo } u_j \text{ è colorato col colore } k \\ x_{jk} = 0 & \text{se il nodo } u_j \text{ non è colorato col colore } k \end{array}$$

La funzione obiettivo conta il numero di colori utilizzati, che si vuole ridurre al minimo.

I primi tre insiemi di vincoli sono associati a clique del grafo. Ad esempio, il primo vincolo stabilisce che nella clique $Q_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ solo uno dei tre vertici possa essere colorato col colore 1. Lo stesso deve valere per le clique $\{u_2, u_3, u_5\}$ (secondo vincolo) e $\{u_1, u_6\}$ (terzo vincolo). Il quarto vincolo impone che uno solo degli elementi di Q_1 possa essere colorato col colore 2, e così via.

L'ultima serie di vincoli stabilisce che tutti i vertici devono ricevere almeno un colore (ovviamente in una soluzione ottima basterà un solo colore per vertice).

Il grafo che si vuole colorare è raffigurato qui sotto insieme a una possibile soluzione ottima.

