

Rispondere alle seguenti domande marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate). Una risposta esatta vale 2 punti, una sbagliata vale -1 punto.

1. Sia $G = (V, E)$ un grafo simmetrico con $|V| = n$. Diremo che G è un albero se e solo se
 (A) G è connesso
 (B) G contiene $n - 1$ archi ed è connesso
 (C) G è privo di cicli
2. Dato un grafo simmetrico, sia $G = (V, E)$ un suo disegno nel piano. Diremo che due archi di E si incrociano se nel disegno G hanno in comune almeno un punto diverso da un nodo. Siano allora $U = E$ e $\mathfrak{S} = \{X \subseteq U: \forall x, y \in X, x \text{ non incrocia } y\}$. La coppia $(U, \mathfrak{S})$
 (A) è subclusiva e non gode della proprietà di scambio
 (infatti se gli archi di X non si incrociano, non si incrociano neppure gli archi di ogni sottoinsieme $Y \subseteq X$; d'altra parte se a non incrocia b e c incrocia sia a che b , $X = \{c\}$, $Y = \{a, b\}$ non godono della proprietà di scambio perché tanto $\{a, c\}$ che $\{b, c\}$ si incrociano.)
 (B) non è subclusiva ma gode della proprietà di scambio
 (C) non è subclusiva e non gode della proprietà di scambio

Risolvere i seguenti esercizi.

3. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, si determini una soluzione ottima del problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq -2 \\ & x_1 - 3x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Si tratta di impostare il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &\geq z \\ -x_1 + x_2 &\leq -2 \\ x_1 - 3x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

eliminando in successione le variabili x_1 e x_2 , poi determinando il massimo valore di z compatibile con i vincoli ottenuti, infine risalendo ai valori ottimi di x_1 e x_2 .

Tabella iniziale

z	x_1	x_2	$<$
0	-1	1	-2
0	1	-3	1
1	-2	3	0

Soluzione ottima:

illimitato

4. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, determinare in forma analitica il poliedro che rappresenta l'involucro conico dei punti $(0, -4, 1)$, $(-1, 0, 1)$, $(2, 1, 0)$.

Detto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un generico vettore dell'involucro conico dei punti dati deve aversi

$$\begin{aligned} x_1 &= -l_2 + 2l_3 \\ x_2 &= -4l_1 + l_3 \\ x_3 &= l_1 + l_2 \\ l_1, l_2, l_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

da cui si ricava il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{array}{rcccccl}
-x_1 & & -l_2 & +2l_3 & \leq & 0 \\
x_1 & & +l_2 & -2l_3 & \leq & 0 \\
-x_2 & -4l_1 & & +l_3 & \leq & 0 \\
x_2 & +4l_1 & & -l_3 & \leq & 0 \\
-x_3 & +l_1 & +l_2 & & \leq & 0 \\
x_3 & -l_1 & -l_2 & & \leq & 0 \\
& -l_1 & & & \leq & 0 \\
& & -l_2 & & \leq & 0 \\
& & & -l_3 & \leq & 0
\end{array}$$

Bisogna ora proiettare il poliedro descritto dal sistema precedente nello spazio $l_1 = l_2 = l_3 = 0$. La proiezione eseguita eliminando la variabile l_2 consente di minimizzare il numero di righe del sistema risultante. Indicando in giallo le righe dell'insieme R^+ e in azzurro quelle dell'insieme R^- , ed eliminando le righe nulle (evidentemente ridondanti) si ha successivamente:

x_1	x_2	x_3	l_1	l_2	l_3	$\leq$
-1	0	0	0	-1	2	0
1	0	0	0	1	-2	0
0	-1	0	-4	0	1	0
0	1	0	4	0	-1	0
0	0	-1	1	1	0	0
0	0	1	-1	-1	0	0
0	0	0	-1	0	0	0
0	0	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	-1	0

0	-1	0	-4	0	1	0
0	1	0	4	0	-1	0
0	0	0	-1	0	0	0
0	0	0	0	0	-1	0
-1	0	-1	1	0	2	0
1	0	1	-1	0	-2	0
1	0	0	0	0	-2	0
0	0	-1	1	0	0	0

0	0	0	-1	0	0	0
0	0	-1	1	0	0	0
-1	2	-1	9	0	0	0
-1	0	-1	1	0	0	0
1	-2	1	-9	0	0	0
1	-2	0	-8	0	0	0
0	-1	0	-4	0	0	0

0	0	-1	0	0	0	0
-1	2	-1	0	0	0	0
-1	0	-1	0	0	0	0
1	-2	-8	0	0	0	0
-8	-2	-8	0	0	0	0
1	-2	-8	0	0	0	0
1	-2	-8	0	0	0	0
-7	-2	-8	0	0	0	0
0	-1	-4	0	0	0	0
-4	-1	-4	0	0	0	0
-4	-1	-4	0	0	0	0

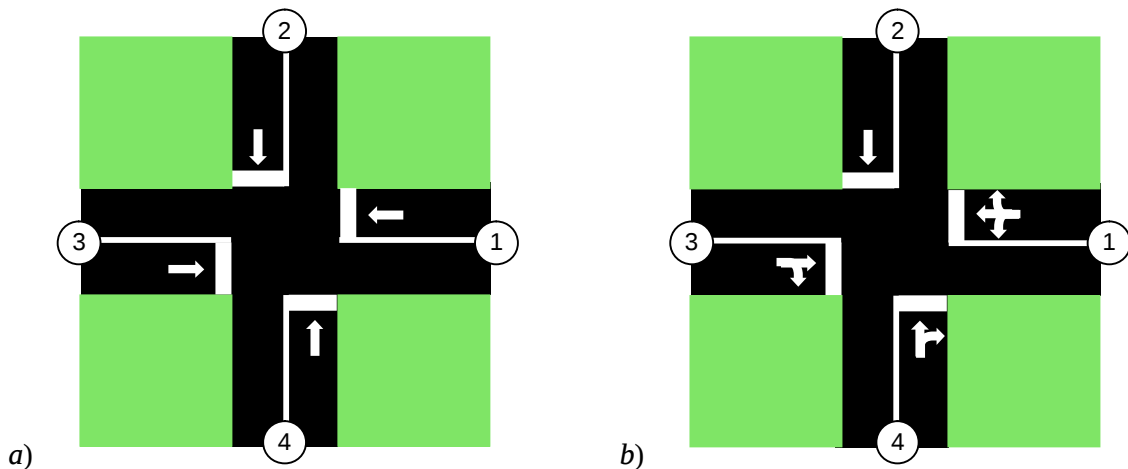
Il cono poliedrale risultante è descritto dalle seguenti disequazioni:

$$\begin{array}{rclcl}
 & -x_3 & \leq 0 & & x_3 & \geq 0 \\
 -x_1 + 2x_2 - x_3 & \leq 0 & & x_1 - 2x_2 + x_3 & \geq 0 \\
 -x_1 & -x_3 & \leq 0 & x_1 & +x_3 & \geq 0 \\
 x_1 - 2x_2 - 8x_3 & \leq 0 & & 8x_1 + 2x_2 + 8x_3 & \geq 0 \\
 -8x_1 - 2x_2 - 8x_3 & \leq 0 & \text{cioè} & 7x_1 + 2x_2 + 8x_3 & \geq 0 \\
 -7x_1 - 2x_2 - 8x_3 & \leq 0 & & x_2 + 4x_3 & \geq 0 \\
 & -x_2 - 4x_3 & \leq 0 & 4x_1 + x_2 + 4x_3 & \geq 0 \\
 -4x_1 - x_2 - 4x_3 & \leq 0 & & x_1 - 2x_2 - 8x_3 & \leq 0
 \end{array}$$

Risolvere il seguente esercizio. La soluzione viene valutata fino a 5 punti.

5. Col rosso non si passa (¹)

Una buona gestione dei semafori è indispensabile se si vuole rendere il traffico più scorrevole. E una buona gestione significa ridurre al minimo il numero di fasi in un ciclo, dove per fase intendiamo l'intervallo temporale durante il quale il semaforo è in un certo stato e per ciclo un insieme di fasi periodicamente ripetuto. Ad esempio, il semaforo posto a regolare il traffico nell'incrocio di figura (a) ha un ciclo composto di due fasi: in una viene consentito l'attraversamento in senso orizzontale (1↔3), nell'altra quello in senso verticale (2↔4) (sono necessarie due fasi distinte perché i corrispondenti flussi di traffico si intersecano).



Il problema di minimizzare il numero di fasi in un ciclo semaforico può in effetti formularsi come problema di colorazione di un opportuno grafo simmetrico. Qual è il grafo da colorare se si vuole ottimizzare la gestione dell'incrocio di figura (b)? Disegnatelo qui sotto spiegando il significato di nodi e archi.

Il problema si può risolvere costruendo un grafo i cui nodi sono associati a flussi di traffico, e nodi adiacenti corrispondono a coppie di flussi di traffico tra loro incompatibili (nell'incrocio di figura (b) sono ad esempio incompatibili i flussi (2↔4) e (1↔4)). Il grafo risultante ha l'aspetto riportato nella figura che segue.

Evidentemente, una fase corrisponde a un insieme stabile del grafo, e il più breve ciclo semaforico corrisponde a una partizione dei nodi del grafo in un minimo numero di insiemi stabili: in altre parole, a una colorazione ammissibile che utilizzi un minimo numero di colori.

¹ Citazione da Peppino De' Filippo in "Guardia, guardia scelta, brigadiere, appuntato, maresciallo".

