

Lez 9-10

Metodo del Simplexso

implementazione matriciale

implementazione Tableau

Esercizi

1

Algoritmo del Simplexso

```

begin
  scegli una base ammissibile iniziale con indici delle colonne B(1),...,B(m)
  illimitato := false
  ottimo := false
  while (ottimo = false) and (illimitato = false) do
    begin
      sia B := [AB(1), ..., AB(m)] la base ammissibile corrente;
      calcola B-1 e pone uT := cBTB-1;
      calcola il costo ridotto  $\bar{c}_h := c_h - u^T A_h$  delle var. xh fuori base;
      if  $\bar{c}_h \geq 0$  per ogni xh fuori base then ottimo := true [TEST OTTIMALITÀ]
      else
        begin
          scegli una variabile fuori base xh con  $\bar{c}_h < 0$ ;
          calcola  $\bar{b} := B^{-1}b$  ed  $\bar{A}_h := B^{-1}A_h$ ;
          if  $\bar{a}_{ih} \leq 0$  per ogni i ∈ {1,...,m} then illimitato := true [TEST ILLIMITATEZZA]
          else
            begin
              calcola t := arg min { $\bar{b}_i / \bar{a}_{ih}$ , i ∈ {1,...,m}:  $\bar{a}_{ih} > 0$ };
              aggiorna la base corrente ponendo B(t) := h
            end
          end
        end
      end
    end
  end
end
  
```

2

Esempio

$$\max 5x_1 + 4x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$4x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$\min -5x_1 - 4x_2$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$$

$$4x_1 + x_2 + x_4 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Base iniziale: B(1) = 3, B(2) = 4

$$B = [A_3 \ A_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3

Iterazione 1

$$B = [A_3 \ A_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad u^T = [0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0]$$

Calcola il costo ridotto delle variabili fuori base

$$\bar{c}_1 = -5 - [0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = -5 \quad \bar{c}_2 = -4 - [0 \ 0] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -4$$

Sceglie la **variabile entrante** x_1

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \bar{A}_h = B^{-1}A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow t=2 \Rightarrow x_{B(2)} = x_4 \text{ var. uscente}$$

$$\text{Nuova base } B(1) = 3, B(2) = 1 \quad B = [A_3 \ A_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

4

Iterazione 2

$$B=[A_3 \ A_4]=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \quad u^T=[0 \ -5] \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -5/4 \end{bmatrix}$$

Calcola il costo ridotto delle variabili fuori base

$$\bar{c}_2 = -4 - [0 \ -5/4] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -4 + 5/4 = -11/4 \quad \bar{c}_4 = 0 - [0 \ -5/4] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 5/4$$

Sceglie la **variabile entrante** x_2

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/4 \\ 3/4 \end{bmatrix} \quad \bar{A}_h = B^{-1}A_h = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{12}} = \frac{13}{11} = \theta \\ \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{22}} = 3 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow t=1 \Rightarrow x_{B(1)} = x_3 \text{ var. uscente}$$

$$\text{Nuova base } B(1) = 2, B(2) = 1 \quad B=[A_2 \ A_1]=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

5

Iterazione 3

$$B=[A_2 \ A_1]=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B^{-1}=\begin{bmatrix} 4/11 & -1/11 \\ -1/11 & 3/11 \end{bmatrix}$$

$$u^T=[-4 \ -5] \begin{bmatrix} 4/11 & -1/11 \\ -1/11 & 3/11 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcola il costo ridotto delle variabili fuori base

$$\bar{c}_3 = 0 - [-1 \ -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \bar{c}_4 = 0 - [-1 \ -1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Costi ridotti tutti positivi $\Rightarrow$ **B base ottima**

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/11 & -1/11 \\ -1/11 & 3/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/11 \\ 5/11 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{soluzione ottima}$$

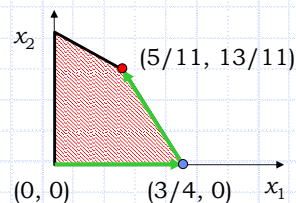
6

Sequenza delle SBA

$$B=[A_3 \ A_4]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B=[A_3 \ A_1]=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/4 \\ 3/4 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B=[A_2 \ A_1]=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/11 & -1/11 \\ -1/11 & 3/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/11 \\ 5/11 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



7

Interpretazione dei costi ridotti

valore della f.o. risp. alla base B:

$$c^T x = c_B^T B^{-1}b + (c_F^T - c_B^T B^{-1}F) x_F = \text{cost} + \bar{c}^T x$$

Quando la variabile entrante x_h passa da zero al valore θ la funzione obiettivo migliora della quantità

$$|\bar{c}_h| \vartheta \geq 0$$

In altre parole, detta $\tilde{B}$ la nuova base, si ha:

$$c_{\tilde{B}}^T \tilde{B}^{-1}b = c_B^T B^{-1}b + \bar{c}_h \vartheta$$

8

Variazione del costo

1ª iterazione:

$$B = [A_3 \ A_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = [A_3 \ A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \tilde{B}^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

$$x_F = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

variabile entrante x_1

$$\bar{c}_1 = -5 - [0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = -5$$

$$c_B^T B^{-1}b + \bar{c}_h \vartheta = 0 + (-5) \frac{3}{4} = -\frac{15}{4}$$

$$\frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{21}} = \frac{3}{4} = \vartheta$$

$$c_{\tilde{B}}^T \tilde{B}^{-1}b = [0 \ -5] \begin{bmatrix} 13/4 \\ 3/4 \end{bmatrix} = -\frac{15}{4}$$

9

Variazione del costo

2ª iterazione:

$$B = [A_3 \ A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = [A_2 \ A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

$$x_{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \tilde{B}^{-1}b = \begin{bmatrix} 4/11 & -1/11 \\ -1/11 & 3/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/11 \\ 5/11 \end{bmatrix}$$

variabile entrante x_2

$$\bar{c}_2 = -4 - [0 \ -5/4] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -11/4 \quad \frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{12}} = \frac{13}{11} = \theta$$

$$c_B^T B^{-1}b + \bar{c}_h \vartheta = -\frac{15}{4} + (-\frac{11}{4}) \frac{13}{11} = -\frac{28}{4} = -7$$

$$c_{\tilde{B}}^T \tilde{B}^{-1}b = [-4 \ -5] \begin{bmatrix} 13/11 \\ 5/11 \end{bmatrix} = -\frac{77}{11} = -7$$

10

Esempio

$$\min -3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = -1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Base iniziale: $B(1) = 2, B(2) = 3$

$$B = [A_2 \ A_3] = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

11

Iterazione 1

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \quad u^T = [2 \ 4] \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} = [10/3 \ -8/3]$$

Calcola il costo ridotto delle variabili fuori base

$$\bar{c}_1 = -3 - [10/3 \ -8/3] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$\bar{c}_4 = 0 - [10/3 \ -8/3] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -10/3$$

Variabile entrante x_4

$$\bar{c}_5 = 0 - [10/3 \ -8/3] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 8/3$$

12

Iterazione 1

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{A}_4 = B^{-1}A_4 = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{14}} = 3 \\ \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{24}} = 3/2 = \vartheta \end{cases} \Rightarrow t=2 \Rightarrow x_{B(2)} = \mathbf{x}_3 \text{ var. uscente}$$

Nuova base $B(1) = 2, B(2) = 4$ $B = [A_2 \ A_4] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

13

Iterazione 2

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \quad u^T = [2 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = [0 \ -1]$$

Calcola il costo ridotto delle variabili fuori base

$$\bar{c}_1 = -3 - [0 \ -1] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -3 + 1 = -2 \quad \text{Variabile entrante } x_1$$

$$\bar{c}_3 = 4 - [0 \ -1] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 5$$

$$\bar{c}_5 = 0 - [0 \ -1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

14

Iterazione 2

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} \quad \bar{A}_1 = B^{-1}A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_{i1} \leq 0 \quad \text{per } i = 1, 2 \Rightarrow \text{problema illimitato}$$

15

Osservazioni

- L'algoritmo termina in un numero finito di passi? Converge alla soluzione ottima?
- Come si individua la SBA al Passo 1 dell'algoritmo?
- L'operazione "critica" è l'inversione della matrice di base B . Esiste un'implementazione "efficiente"?

16

Il tableau del simplesso

Rappresentazione rispetto ad una SBA:

c_B^T	c_F^T	0
B	F	b

17

Il tableau del simplesso

Premoltiplicando per B^{-1}

c_B^T	c_F^T	0
I	$B^{-1}F$	$B^{-1}b$

18

Il tableau del simplesso

Sottraiamo alla riga 0 la matrice premoltiplicata per c_B^T

$c_B^T - c_B^T = 0$	$c_F^T - c_B^T B^{-1}F$	$-c_B^T B^{-1}b$
I	$B^{-1}F$	$B^{-1}b$

19

Il tableau del simplesso

Vettore dei costi ridotti		
0	$c_F^T - c_B^T B^{-1}F$	$-c_B^T B^{-1}b$
I	$B^{-1}F$	$B^{-1}b$

Valore di f.o. cambiato di segno

Valore delle variabili in base

Variabili in base

Variabili fuori base

Rappresentazione in forma canonica rispetto alla base B

20

Esercizio

$$\min -2x_1 - 5x_2 - x_3$$

$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 4$$

$$5x_2 + x_3 + x_5 = 5$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_6 = 6$$

$$x \geq 0$$

-2	-5	-1	0	0	0	0
1	3	0	1	0	0	4
0	5	1	0	1	0	5
2	4	1	0	0	1	6

x_4

x_5

x_6

21

Esercizio

Costo ridotto negativo

-2	-5	-1	0	0	0	0
1	3	0	1	0	0	4
0	5	1	0	1	0	5
2	4	1	0	0	1	6

Elemento di pivot:
 $\min \{4/3, 1, 6/4\} = 1$

-2	-5	-1	0	0	0	0
1	3	0	1	0	0	4
0	1	1/5	0	1/5	0	1
2	4	1	0	0	1	6

Si normalizza la
 riga di pivot

22

Esercizio

-2	-5	-1	0	0	0	0
1	3	0	1	0	0	4
0	1	1/5	0	1/5	0	1
2	4	1	0	0	1	6

La riga di pivot moltiplicata per -3 è sommata alla riga 1:

-2	-5	-1	0	0	0	0
1	0	-3/5	1	-3/5	0	1
0	1	1/5	0	1/5	0	1
2	4	1	0	0	1	6

23

Esercizio

-2	-5	-1	0	0	0	0
1	0	-3/5	1	-3/5	0	1
0	1	1/5	0	1/5	0	1
2	4	1	0	0	1	6

La riga di pivot moltiplicata per -4 è sommata alla riga 3:

-2	-5	-1	0	0	0	0
1	0	-3/5	1	-3/5	0	1
0	1	1/5	0	1/5	0	1
2	0	1/5	0	-4/5	1	2

24

Esercizio

-2	-5	-1	0	0	0	0
1	0	-3/5	1	-3/5	0	1
0	1	1/5	0	1/5	0	1
2	0	1/5	0	-4/5	1	2

La riga di pivot moltiplicata per 5 è sommata alla riga 0:

-2	0	0	0	1	0	5
1	0	-3/5	1	-3/5	0	1
0	1	1/5	0	1/5	0	1
2	0	1/5	0	-4/5	1	2

25

Esercizio

-2	0	0	0	1	0	5	
1	0	-3/5	1	-3/5	0	1	x_4
0	1	1/5	0	1/5	0	1	x_2
2	0	1/5	0	-4/5	1	2	x_6

La nuova soluzione $x = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2]$

NON VERIFICA il test di ottimalità, quindi si passa alla nuova iterazione (pivot)

26

Esercizio

-2	0	0	0	1	0	5
1	0	-3/5	1	-3/5	0	1
0	1	1/5	0	1/5	0	1
2	0	1/5	0	-4/5	1	2

Elemento di pivot:
 $\min \{1, 2/2\} = 1$

0	0	1/5	0	1/5	1	7	
0	0	-7/10	1	-1/5	-1/2	0	x_4
0	1	1/5	0	1/5	0	1	x_2
1	0	1/10	0	-2/5	1/2	1	x_1

$x = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ **OTTIMA**. Valore = -7.

27