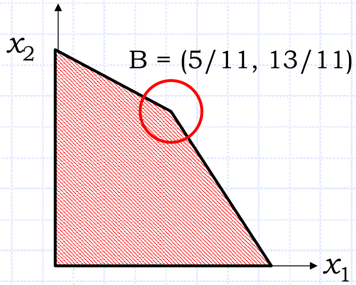
Lez 8-9

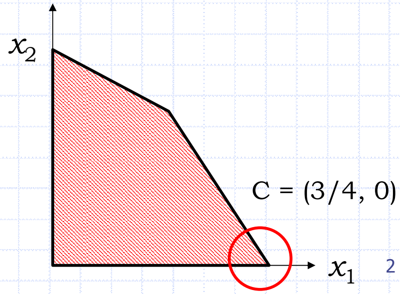
basi adiacenti
corrispondenza basi-soluzioni di base
degenerazione – caso illimitato
condizione di ottimalità
spostamento da SBA a SBA adiacente
Algoritmo del simplesso – implementazione matriciale

Basi adiacenti

Dato un problema in forma standard, due basi si dicono adiacenti se differiscono per una sola colonna.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$





Corrispondenza basi-soluzioni di base

- Soluzioni di base diverse corrispondono a basi diverse. Infatti B è non singolare e $Bx_B=b$ ha un'unica soluzione
- Basi diverse possono corrispondere alla stessa soluzione di base

esempio:

$$x_1 + x_4 = 1$$
$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$x_3 + x_4 - x_5 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Corrispondenza basi-soluzioni di base

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_5 \end{matrix} \\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B_1^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

degenere

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_4 \end{matrix} \\ B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B_2^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le basi B1 e B2 (adiacenti!) generano la stessa SBA

Ricapitolando…

Abbiamo descritto un algoritmo enumerativo che trova la soluzione ottima in al più $n!\ /\ m!\ (n-m)!$ passi.

1. Esiste un criterio per arrestare l'algoritmo prima di aver enumerato tutte le possibili SBA?

   (Test di ottimalità)

2. Esiste un modo efficiente di passare da una SBA ad un'altra?

   (Ad es., potremmo cercare di far diminuire la f.o. ad ogni iterazione …)

Dal caso limitato a quello generale

Ricordiamo che:

Se P è un politopo, allora il problema $\min\ c^T x,\ x \in P$ ammette almeno una soluzione ottima in corrispondenza di un vertice.

Nel caso generale:

Teorema

Consideriamo il problema $\min\ c^T x,\ x \in P$ in cui P è un poliedro. Supponiamo che P abbia almeno un vertice. Allora, o il problema è illimitato (valore ottimo $-\infty$) oppure ammette almeno un vertice ottimo.

Oss. Se il poliedro non ha vertici, si può costruire un problema equivalente in forma standard che ha sempre almeno un vertice

Test di ottimalità

Consideriamo una generica soluzione $x = [x_B\ x_F]$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Fx_F$$

La funzione obiettivo vale

$$c^T x = [c_B^T, c_F^T]\begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = [c_B^T, c_F^T]\begin{bmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Fx_F \\ x_F \end{bmatrix}$$

Condizione di ottimalità

Ovvero

$$c^T x = c_B^T B^{-1} b + (c_F^T - c_B^T B^{-1} F) x_F =$$

$$= \text{cost} + \bar{c}^T x$$

Definizione

Il vettore

$$\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A =$$

$$= [c_B{}^T - c_B^T B^{-1} B, c_F{}^T - c_B^T B^{-1} F]$$

Si dice vettore dei costi ridotti rispetto alla base *B*

Costi ridotti

Osservazione:

$$[\underbrace{c_B^{\ T} - c_B^T B^{-1} B}_{=0}, c_F^{\ T} - c_B^T B^{-1} F]$$

Teorema

Sia x^* una SBA associata alla base B. Se

$$\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0^T$$

allora x^* è una soluzione ottima

Dimostrazione

A partire dalla base B associata a x^* posso riscrivere la funzione obiettivo (per ogni $x \in P$) come:

$$c^T x = c_B^T B^{-1} b + (c_F^T - c_B^T B^{-1} F) x_F =$$

$$= c_B^T B^{-1} b + \bar{c}^T x \geq c_B^T B^{-1} b$$

Il $\geq$ segue da $\bar{c}^T \geq 0$ e da $x \geq 0$

Osservando che

$$c^T x^* = c_B^T B^{-1} b$$

si ha la tesi.

condizione di ottimalità e degenerazione

Il teorema precedente è una condizione sufficiente di ottimalità

La condizione diventa necessaria e sufficiente se la SBA è non degenere. Si ha cioè:

Teorema

Sia x^* una SBA associata alla base B e $\bar{c}^T$ il corrisp. vettore dei costi ridotti. Si ha che:

(a) se $\bar{c}^T \geq 0$ allora x^* è ottima

(b) se x^* è ottima e non degenere allora $\bar{c}^T \geq 0$

Al contrario, nel caso degenere esiste la possibilità che una SBA sia ottima ma qualche variabile (fuori base) abbia costo ridotto negativo

Esempio

Consideriamo la SBA $x = (3/4, 0, 13/4, 0)$, corrispondente alle colonne {1, 3} di A.

L'inversa della matrice di base B è:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -1/4 \end{bmatrix}$$

quindi il vettore dei costi ridotti vale:

$$c_B^T B^{-1} F = [-5 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_F^T - c_B^T B^{-1} F = [-4 \quad 0] - [-5/4 \quad -5/4]$$

$$\bar{c}^T = [0 \quad -11/4 \quad 0 \quad 5/4]$$

NON OTTIMA!!!

Esempio

Invece, la SBA $x = (5/11, 13/11, 0, 0)$, corrispondente alle colonne {1, 2} di A ha come inversa della base la matrice

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/11 & 3/11 \\ 4/11 & -1/11 \end{bmatrix}$$ quindi il vettore dei costi ridotti vale:

$$c_B^T B^{-1} F = [-5 \quad -4] \begin{bmatrix} -1/11 & 3/11 \\ 4/11 & -1/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_F^T - c_B^T B^{-1} F = [0 \quad 0] - [-1 \quad -1]$$

$$\bar{c}^T = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]$$ SOLUZIONE OTTIMA!!!

Cambiamento di base

Sia B una base di A contenente le variabili $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}F x_F$$

$$c^T x = c_B^T B^{-1} b + (c_F^T - c_B^T B^{-1} F) x_F =$$

$$= \text{cost} + \bar{c}^T x$$

Se una variabile x_h fuori base ha costo ridotto $\bar{c}_h < 0$ è vantaggioso che assuma valori positivi.

L'idea è di individuare una base adiacente a B tale da includere la variabile (colonna) x_h.

Cambiamento di base

Quindi, rilasciamo la variabile x_h e teniamo fissate a zero tutte le altre fuori base (condizione per ottenere una base adiacente).

Allora, il sistema

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}F x_F$$

diventa

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}F \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_h \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = B^{-1}b - B^{-1}A_h x_h = \bar{b} - \bar{A}_h x_h$$

N.B. $\boxed{\bar{b} \geq 0}$

Cambiamento di base

Per ottenere una soluzione ammissibile deve essere:

$$\boxed{\begin{cases} x_{B(1)} = \bar{b}_1 - \theta \bar{a}_{1h} \geq 0 \\ x_{B(2)} = \bar{b}_2 - \theta \bar{a}_{2h} \geq 0 \\ \ldots \\ x_{B(m)} = \bar{b}_m - \theta \bar{a}_{mh} \geq 0 \end{cases}} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \bar{a}_{1h} x_h \leq \bar{b}_1 \\ \bar{a}_{2h} x_h \leq \bar{b}_2 \\ \ldots \\ \bar{a}_{mh} x_h \leq \bar{b}_m \end{cases}}$$

Cambiamento di base

$$\begin{cases} \bar{a}_{1h} x_h \le \bar{b}_1 \\ \bar{a}_{2h} x_h \le \bar{b}_2 \\ \dots \\ \bar{a}_{mh} x_h \le \bar{b}_m \end{cases}$$

Per ciascuna di tali condizioni si hanno due possibilità:

$\bar{a}_{ih} \le 0 \Rightarrow$ nessun vincolo per $x_h \ge 0$

$\bar{a}_{ih} > 0 \Rightarrow x_h \le \dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}}$

Quindi, il valore massimo che x_h può assumere è

$$\boxed{\theta = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} : i = \{1,\dots, m\}, \bar{a}_{ih} > 0 \right\}}$$

Osservazioni

1. Quando x_h assume il suo valore limite il valore della funzione obiettivo diminuisce della quantità $|\bar{c}_h|\theta$
2. Se esiste un qualche i per cui $\bar{b}_i = 0$ (caso degenere), e $\bar{a}_{ih} > 0$ allora θ=0 e non si ha miglioramento della f.o.
3. Se $\bar{a}_{ih} \le 0, \quad i = 1,\dots, m$ θ può assumere un valore grande a piacere e il problema è inferiormente illimitato

Nuova base

Detta t la riga con $\bar{a}_{th} > 0$ tale che $\theta = \dfrac{\bar{b}_t}{a_{th}}$

Imponendo $x_h = \theta$ si ottiene

$$\boxed{x_{B(t)} = \bar{b}_t - \theta \bar{a}_{th} = 0}$$

Cioè, x_h "esce dalla base". In pratica, abbiamo sostituito la colonna $A_{B(t)}$ con la nuova colonna "conveniente" A_h:

$$B=[A_{B(1)},\dots,A_{B(t)},\dots,A_{B(m)}] \Rightarrow \tilde{B}=[A_{B(1)},\dots,A_{B(t-1)},A_{B(h)},A_{B(t+1)},\dots,A_{B(m)}]$$

Nuova base

E' facile dimostrare che $\tilde{B}$ è una ancora una base:

$$B^{-1}\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \bar{a}_{1h} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{th} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{mh} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(B^{-1}\tilde{B}) = (-1)^{t+h}\bar{a}_{th} \ne 0 \Rightarrow \det(\tilde{B}) \ne 0$$

Algoritmo del Simplesso

begin
sceglie una base ammissibile iniziale con indici delle colonne $B(1),\dots,B(m)$
illimitato := `false`
ottimo:= `false`
while (ottimo = `false`) **and** (illimitato = `false`) **do**
  begin
    sia $B := [A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}]$ la base ammissibile corrente;
    calcola B^{-1} e pone $u^T := c_B^T B^{-1}$;
    calcola il costo ridotto $\overline{c}_h := c_h - u^T A_h$ delle var. x_h fuori base;
    if $\overline{c}_h \geq 0$ per ogni x_h fuori base then ottimo := `true`
    else
      begin
        scegli una variabile fuori base x_h con $\overline{c}_h < 0$;
        calcola $\overline{b} := B^{-1}b$ ed $\overline{A}_h := B^{-1}A_h$;
        if $\overline{a}_{ih} \leq 0$ per ogni $i \in \{1,\dots,m\}$ then illimitato := `true`
      else
        begin
          calcola $t := \arg\min \{\overline{b}_i / \overline{a}_{ih},\ i \in \{1,\dots,m\} : \overline{a}_{ih} > 0\}$;
          aggiorna la base corrente ponendo $B(t) := h$
        end
      end
  end
end