Lez 5-8

Geometria della PL

Esempio: Soluzione per enumerazione totale dei vertici (caso limitato)

Basi e soluzioni di base

Equivalenza sba-vertici

Esempio: Soluzione per enumerazione totale delle soluzioni (ammissibili) di base

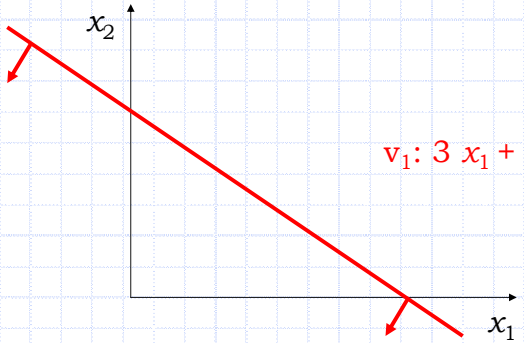
DA FARE: degenerazione – caso illimitato

Geometria della PL

L'insieme delle soluzioni ammissibili di un problema di PL è definito da un insieme finito di disequazioni lineari

Definizione

Gli insiemi $\{x \in \Re^n: a^T x \leq b\}$ e $\{x \in \Re^n: a^T x = b\}$ si dicono risp. *semispazio* ed *iperpiano*



Geometria della PL

Un semispazio è un insieme chiuso e convesso

L'intersezione di un numero finito di semispazi è un insieme chiuso e convesso detto POLIEDRO.

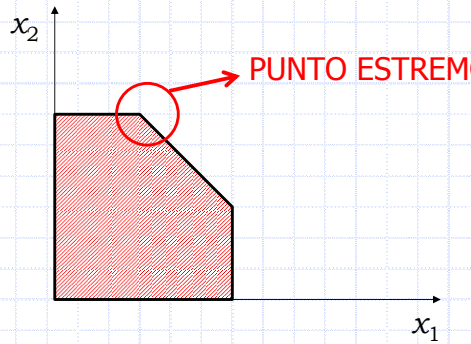
Un insieme $S \subseteq \Re^n$ si dice limitato se esiste una costante M tale che il valore assoluto di ogni componente di ogni elemento di S è minore o uguale a M

Un poliedro limitato si dice POLITOPO

Punti estremi

Definizione

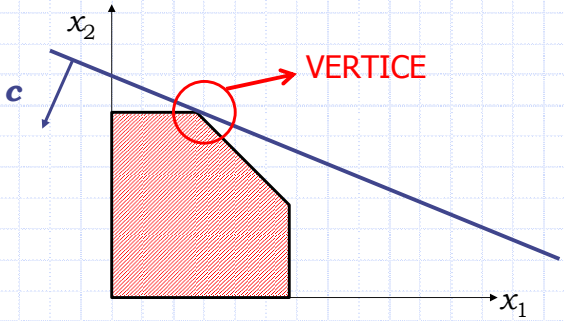
Un punto x si dice punto estremo di un poliedro P se non può essere espresso come combinazione convessa con $\lambda \in (0, 1)$ di altri due punti di P.



Vertici

Definizione

Un punto x si dice vertice di un poliedro P se esiste un vettore c tale che $c^T x < c^T y$ per tutti gli $y \in P$, $y \neq x$



cioè, un punto x è vertice di P se P giace su un lato dell'iperpiano $\{z: c^T z = c^T x\}$ e tale iperpiano tocca P solo in x

Equivalenza punti estremi e vertici

Teorema

Sia x^* un vertice di un poliedro P. Allora x^* è punto estremo di P

Dimostrazione

Se x^* un vertice di P, allora esiste un vettore c tale che $c^T x^* < c^T y$ per tutti gli $y \in P$, $y \neq x^*$.

Quindi, presi due punti generici di P, risp. w e z entrambi diversi da x^* risulta

$c^T x^* < c^T w$

$c^T x^* < c^T z$

Equivalenza punti estremi e vertici

Teorema

Sia x^* un vertice di un poliedro P. Allora x^* è punto estremo di P

Dimostrazione (segue)

Quindi, per la combinazione convessa di w e z, con $\lambda \geq 0$, risulta

$c^T x^* < c^T(\lambda w + (1-\lambda) z)$

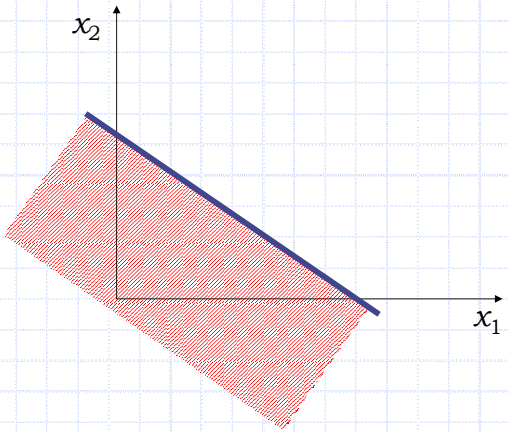
cioè

$x^* \neq \lambda w + (1-\lambda) z$

Quindi, il punto x^* non può essere ottenuto per combinazione convessa di punti di P.

Proprietà

1. Un poliedro ha un numero finito di vertici
2. Esistono poliedri senza vertici



Rappresentazione dei politopi

Teorema (Minkowski-Weyl)

Ogni punto di un politopo si può ottenere come combinazione convessa dei suoi vertici.

Conseguenza:

Teorema

Se P è un politopo, allora il problema $\min c^T x,\ x \in P$ ammette almeno una soluzione ottima in corrispondenza di un vertice.

Dimostrazione

Sia P un politopo e siano $\mathrm{Ext}\,(P) = \{x^1, x^2, \ldots, x^k\}$ i suoi vertici.

Sia $z^* = \min \{c^T x^1, c^T x^2, \ldots, c^T x^k\}$

Un qualsiasi punto $y \in P$ può essere espresso come combinazione convessa dei vertici di P, ovvero:

$$y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$$

quindi:

$$c^T y = c^T \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (c^T x^i) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z^* = z^*$$

□

Ricapitolando…

1. Un problema di PL è un problema di programmazione convessa, ovvero in corrispondenza di un minimo locale ammette un minimo globale.

2. Se il problema di PL è definito su un politopo, allora esiste una soluzione ottima su un vertice, ovvero basta enumerare tutti i vertici per trovare la soluzione ottima.

Algoritmo per la PL su politopi

1. Scegli un vertice x^i e valuta la f.o. in corrispondenza del vertice ($c^T x^i$)
2. Se esiste un vertice "vicino" migliore, spostati sul nuovo vertice.
3. Continua finché esistono vertici che migliorano la f.o.

L'algoritmo termina perché esistono un numero finito di vertici e si arresta in un punto di minimo locale, che è anche di minimo globale

Esempio

$\max 5\,x_1 + 4\,x_2$

$x_1 + 3\,x_2 \leq 4$

$4\,x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

$\min -5\,x_1 - 4\,x_2$

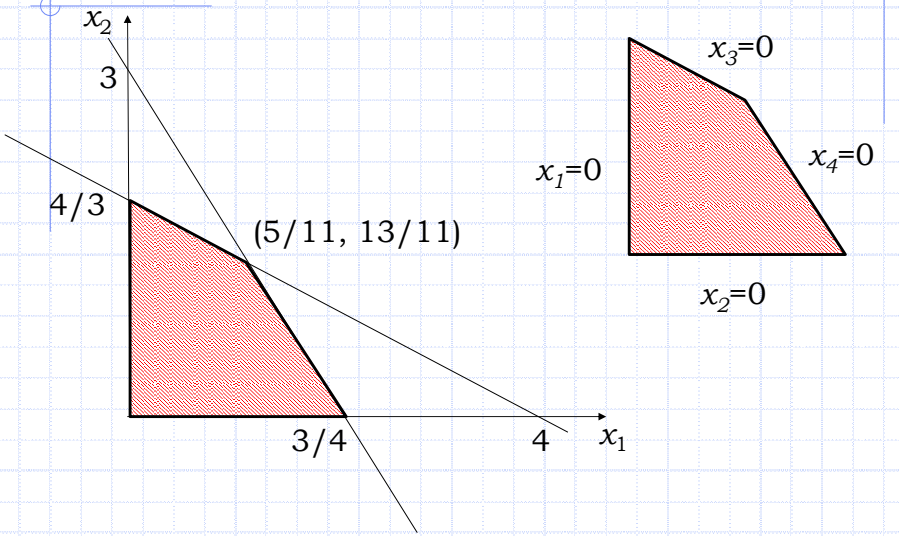
$x_1 + 3\,x_2 + x_3 = 4$

$4\,x_1 + x_2 + x_4 = 3$

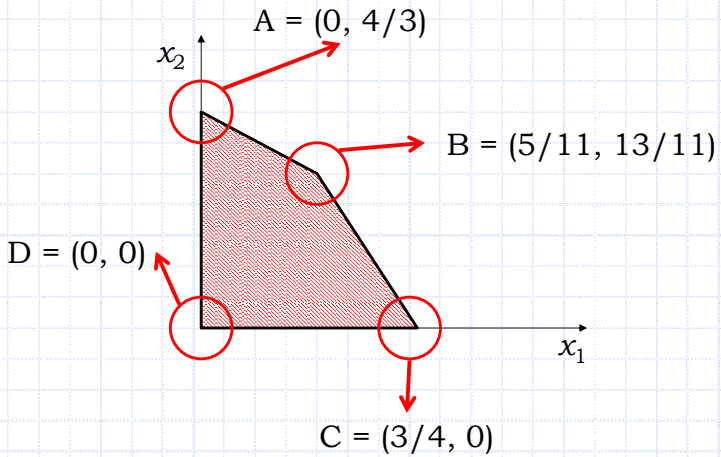
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Sistema di 2 *equazioni e* 4 *incognite*

Regione ammissibile

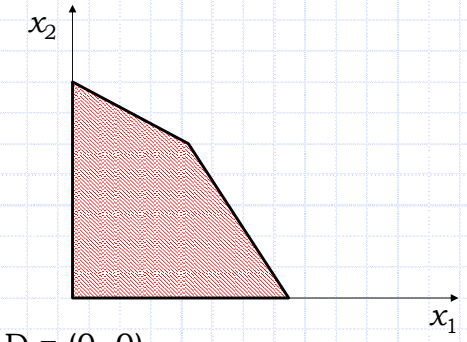


Vertici



Corrispondenza vertici/soluzioni del sistema

Annullando 2 delle 4 variabili si ottengono le soluzioni corrispondenti ai vertici



D = (0, 0)

$x_1 + 3\,x_2 + x_3 = 4$

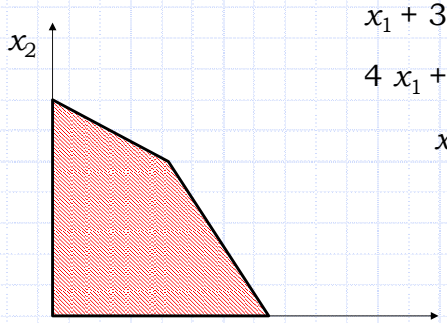
$4\,x_1 + x_2 + x_4 = 3$

$x_1 = x_2 = 0$

$\Rightarrow$ $x_3 = 4$, $x_4 = 3$

D: $-5\,x_1 - 4\,x_2 = 0$

Corrispondenza vertici/soluzioni del sistema



$x_1 + 3\,x_2 + x_3 = 4$

$4\,x_1 + x_2 + x_4 = 3$

$x_2 = x_4 = 0$

$\Rightarrow$ $x_1 = 3/4$

$x_3 = 13/4$

C = (3/4, 0)

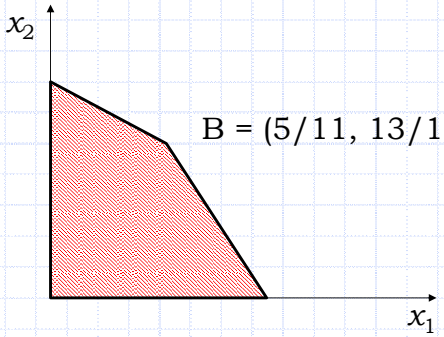
C: $-5\,x_1 - 4\,x_2 = -15/4$

Corrispondenza vertici/soluzioni del sistema

$1\,x_1 + 3\,x_2 + x_3 = 4$

$4\,x_1 + 1\,x_2 + x_4 = 3$

$x_3 = x_4 = 0$



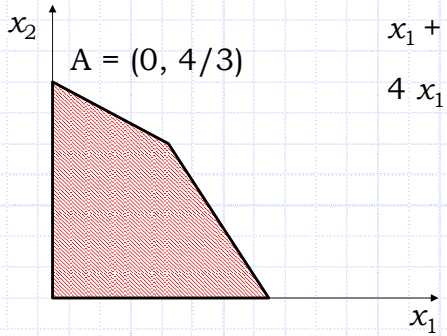
B = (5/11, 13/11)

$\Rightarrow$ $x_1 = 5/11$

$x_2 = 13/11$

B: $-5\,x_1 - 4\,x_2 = -7$

Corrispondenza vertici/soluzioni del sistema



$x_1 + 3\,x_2 + x_3 = 4$

$4\,x_1 + x_2 + x_4 = 3$

$x_1 = x_3 = 0$

$\Rightarrow$ $x_2 = 4/3$

$x_4 = 5/3$

A: $-5\,x_1 - 4\,x_2 = -16/3$

Stop non ci sono vertici "vicini migliorativi"

Ipotesi sulla matrice

In generale, se abbiamo n incognite ed m vincoli, annullando $m - n$ incognite si ricavano le rimanenti m incognite in modo univoco se e solo se il sistema è non-singolare

Dato un problema in forma standard con regione ammissibile

$P = \{x \geq 0 : Ax = b\}$ con $A = [A_1, A_2, \ldots, A_n]$

assumiamo $m \leq n$ e A abbia rango pieno, cioè

rango(A) = m

Basi di A

Una collezione di m colonne linearmente indipendenti di A si dice BASE di A

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rappresentazione rispetto ad una base

Data una base possiamo considerare la seguente partizione della matrice A

$A = [B\ F]$

B è una matrice (quadrata) formata da colonne linearmente indipendenti, ovvero è invertibile

Riscriviamo il sistema rispetto alla partizione:

$$Ax = b$$

$$[B \quad F]\begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = b$$

$$Bx_B + Fx_F = b$$

Rappresentazione rispetto ad una base

B matrice invertibile, quindi premoltiplicando per B^{-1}

$$Bx_B + Fx_F = b$$

si ottiene

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Fx_F = B^{-1}b$$

ovvero

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Fx_F$$

Soluzioni di base

La soluzione del sistema $Ax = b$ ottenuta ponendo

$$x_B = B^{-1}b$$

$$x_F = 0$$

si dice Soluzione di Base.

Se $B^{-1}b \geq 0$ allora la soluzione si dice Soluzione di Base Ammissibile (SBA)

Esempio

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

B F

$$B^{-1}b = \left[\begin{array}{cc|c} -1/11 & 3/11 & 4 \\ 4/11 & -1/11 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 5/11 \\ 13/11 \end{array}\right]$$

Basi degeneri

Definizione

Una base B si dice degenere se $B^{-1}b$ ha una o più componenti nulle

Corrispondenza soluzioni di base/vertici

Teorema

Un punto $x \in P$ è un vertice del poliedro non vuoto $P = \{Ax=b,\ x \geq 0\}$, se e solo se x è una SBA del sistema $Ax = b$.

Dimostrazione

x SBA $\Rightarrow$ x vertice

Sia

$x = [x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0]^T$

una qualunque SBA associata ad una qualche base B

($k \leq m$ componenti non nulle, quindi, le colonne $A_1, \ldots, A_k$ fanno parte di B eventualmente insieme ad altre)

Corrispondenza soluzioni di base/vertici

Se x non è un vertice di P, allora esistono due punti y e z:

$y = [y_1, y_2, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0] \in P$

$z = [z_1, z_2, \ldots, z_k, 0, \ldots, 0] \in P$

con $y \neq z$, tali che $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ per un qualche $\lambda \in (0,1)$

I due punti y e z hanno tutte le ultime componenti nulle, altrimenti la combinazione convessa non restituisce x.

Dimostrazione

Allora:

$y \in P \Rightarrow Ay = b \Rightarrow A_1 y_1 + A_2 y_2 + \ldots + A_k y_k = b$

$z \in P \Rightarrow Az = b \Rightarrow A_1 z_1 + A_2 z_2 + \ldots + A_k z_k = b$

Sottraendo z a y:

$(y_1 - z_1)A_1 + (y_2 - z_2)A_2 + \ldots + (y_k - z_k)A_k = 0$

cioè

$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_1 + \ldots + \alpha_k A_k = 0$

Avendo posto $\alpha_i = y_i - z_i$, $i = 1,\ldots,k$ ed essendo $y \neq z$, gli scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sono non tutti nulli $\Rightarrow$
le colonne di A sono linearmente dipendenti (ASSURDO)

Dimostrazione

x vertice $\Rightarrow$ x SBA

Supponiamo x vertice ma x non è una SBA di $Ax=b$. Scriviamo $x = [x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0]$ esplicitando le componenti non nulle di x.

$x \in P \Rightarrow Ax = b \Rightarrow A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_k x_k = b$ (*)

Se x non è una SBA, allora le colonne $A_1, A_2, \ldots A_k$ sono linearmente dipendenti.

Altrimenti, scegliendone $m-k$ linearmente indipendenti in modo arbitrario si otterrebbe una base B a cui corrisponde la sba x

(essendo $Ax=b$ e le componenti fuori base tutte nulle)

Dimostrazione

Quindi, se le colonne $A_1, A_2, \ldots A_k$ sono linearmente dipendenti,
abbiamo:

$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_1 + \ldots + \alpha_k A_k = 0$ (**)

con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ coefficienti non tutti nulli.

Moltiplichiamo (**) per ε e sommiamola (sottraiamola) a (*):

Dimostrazione

Otteniamo:

(1) $(x_1+\varepsilon\alpha_1) A_1 + (x_2+\varepsilon\alpha_2) A_2 + \ldots + (x_k+\varepsilon\alpha_k) A_k = b$

(2) $(x_1-\varepsilon\alpha_1) A_1 + (x_2-\varepsilon\alpha_2) A_2 + \ldots + (x_k-\varepsilon\alpha_k) A_k = b$

Se definisco:

$y = [(x_1 - \varepsilon\alpha_1), (x_2 - \varepsilon\alpha_2), \ldots, (x_k - \varepsilon\alpha_k), 0, \ldots 0]$

$z = [(x_1+\varepsilon\alpha_1), (x_2+\varepsilon\alpha_2), \ldots, (x_k+\varepsilon\alpha_k), 0, \ldots 0]$

Da (1) e (2) ho che $Ay = b$ e $Az = b$, con $y, z \geq 0$ (per ε piccolo). Questo implica che y e z sono in P.

Dimostrazione

$y = [(x_1 - \varepsilon\alpha_1), (x_2 - \varepsilon\alpha_2), \ldots, (x_k - \varepsilon\alpha_k), 0, \ldots 0\,] \in P$

$z = [(x_1 + \varepsilon\alpha_1), (x_2 + \varepsilon\alpha_2), \ldots, (x_k + \varepsilon\alpha_k), 0, \ldots 0\,] \in P$

Inoltre,

$$x = 1/2\ y + 1/2\ z$$

Ovvero, x si ottiene come combinazione convessa (stretta) di due punti di P.

Quindi, x NON è un vertice (CONTRADDIZIONE)

Corrispondenza SBA-vertici

Consideriamo il seguente problema di PL in forma standard:

$$\min -5\,x_1 - 4\,x_2$$

$$x_1 + 3\,x_2 + x_3 = 4$$

$$4\,x_1 + x_2 + x_4 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Esso ha tutte le seguenti soluzioni di base:

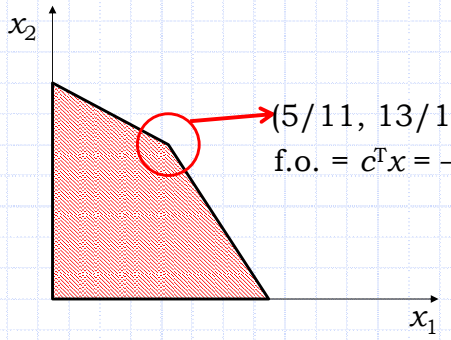
Corrispondenza SBA-vertici

$B_1 = \{1, 2\}$

$$A = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad x^1 = \begin{bmatrix} 5/11 \\ 13/11 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1/11 & 3/11 \\ 4/11 & -1/11 \end{bmatrix} \qquad B_1^{-1} b = \begin{bmatrix} 5/11 \\ 13/11 \end{bmatrix}$$

Corrispondenza SBA-vertici



$x_1 + 3\,x_2 + x_3 = 4$

$4\,x_1 + x_2 + x_4 = 3$

$x_3 = x_4 = 0$

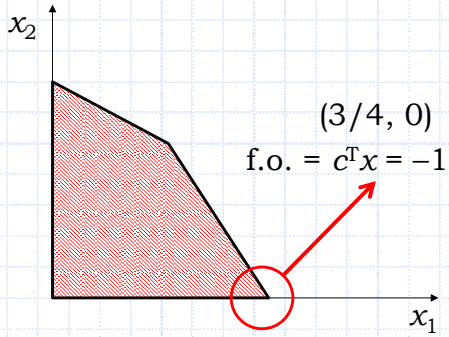
Corrispondenza SBA-vertici

$B_2 = \{1, 3\}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad x^2 = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 0 \\ 13/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -1/4 \end{bmatrix} \qquad B_2^{-1} b = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 13/4 \end{bmatrix}$$

Corrispondenza SBA-vertici



$x_1 + 3\,x_2 + x_3 = 4$

$4\,x_1 + x_2 + x_4 = 3$

$x_2 = x_4 = 0$

$x_1 = 3/4$

$x_3 = 13/4$

Corrispondenza SBA-vertici

$B_3 = \{1, 4\}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad x^3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$B_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_3^{-1} b = \begin{bmatrix} 4 \\ -13 \end{bmatrix}$$

Corrispondenza SBA-vertici

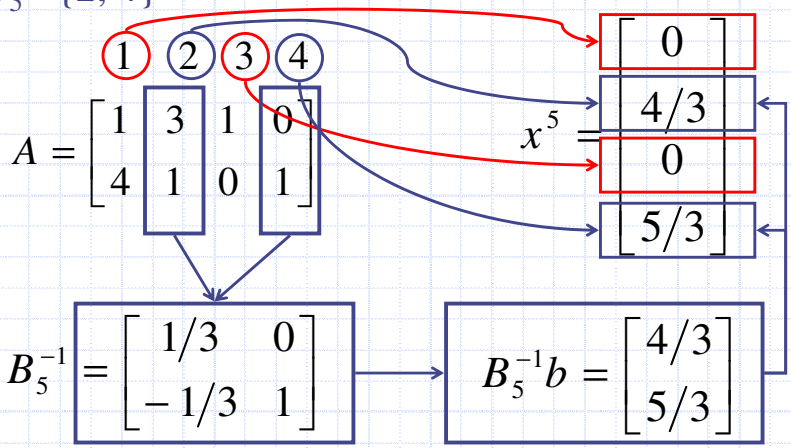
$B_4 = \{2, 3\}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad x^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

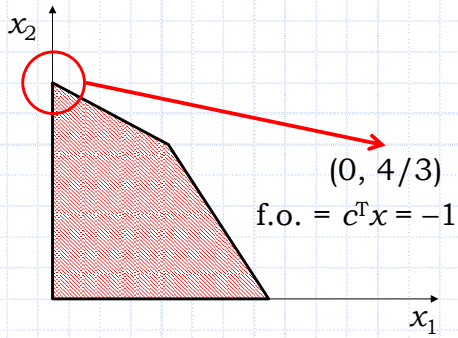
$$B_4^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad B_4^{-1} b = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Corrispondenza SBA-vertici

$B_5 = \{2, 4\}$



Corrispondenza SBA-vertici



$x_1 + 3\,x_2 + x_3 = 4$

$4\,x_1 + x_2 + x_4 = 3$

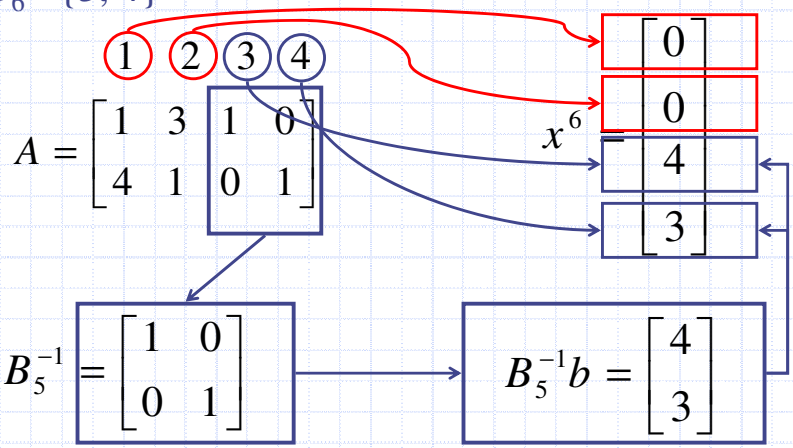
$x_1 = x_3 = 0$

$x_2 = 4/3$

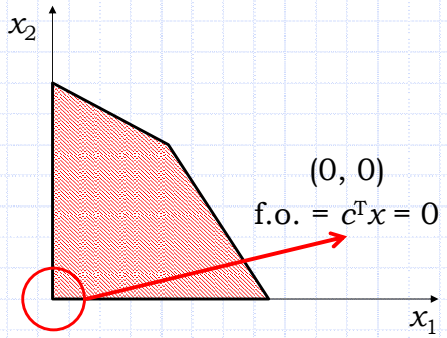
$x_4 = 5/3$

Corrispondenza SBA-vertici

$B_6 = \{3, 4\}$



Corrispondenza SBA-vertici



$x_1 + 3\,x_2 + x_3 = 4$

$4\,x_1 + x_2 + x_4 = 3$

$x_1 = x_2 = 0$

$x_3 = 4$

$x_4 = 3$

Ricapitolando…

Abbiamo descritto un algoritmo enumerativo che trova la soluzione ottima in al più $n! \ / \ m! \ (n-m)!$ passi.

1. Esiste un criterio per arrestare l'algoritmo prima di aver enumerato tutte le possibili SBA?
   (Test di ottimalità)

2. Esiste un modo efficiente di passare da una SBA ad un'altra?
   (Ad es., potremmo cercare di far diminuire la f.o. ad ogni iterazione …)