Ricerca Operativa
A. A. 2008-2009

Docente
Stefano Smriglio
Orario di ricevimento
Mercoledì 17.00-19.00
e-mail smriglio@di.univaq.it

Orario delle lezioni
Mercoledì ore 15.00 – 17.00 aula 1.6
Giovedì ore 15.00 – 17.00 aula 1.6

Materiale didattico
Matteo Fischetti, Lezioni di Ricerca Operativa, Edizioni Libreria Progetto Padova
Trasparenti dalle lezioni

Cos'è la Ricerca Operativa?

La Ricerca Operativa è la disciplina che concerne l'utilizzo del metodo scientifico nei processi decisionali.

Caratteristiche del suo approccio sono l'analisi e la modellizzazione dei sistemi, allo scopo di prevederne l'evoluzione e/o di individuare le scelte che li facciano evolvere verso gli obiettivi desiderati.

La sua natura è intrinsecamente interdisciplinare e, dunque, si interfaccia con la Matematica Applicata, l'Informatica, l'Economia, l'Ingegneria.

Gli strumenti che essa adopera sono, principalmente, modelli matematici, statistici e simulativi che tratta attraverso tecniche analitiche e numeriche.

Un po' di storia…

1937 Sir Watson-Watt
1947 Dantzig (metodo del simplesso)
1956 Ford e Fulkerson (max flow/ min cut)
1965 Edmonds (matching)
1979 Khachiyan (algoritmi polinomiali per la PL)
……
1987 Padberg, Rinaldi
(TSP 532 città)
2004 Applegate, Bixby Chvatal, Cook
(TSP 15.112 città)

Contesti applicativi della Ricerca Operativa

- Logistica
- Progetto di reti di telecomunicazione
- Pianificazione della produzione
- Gestione del traffico aereo
- Gestione di call center
- ………

Il problema del pasticciere

[NEWTON, febbraio 2004]
Un pasticciere produce 2 tipi di uova:
EXTRA e SUPER utilizzando cacao, nocciole e latte

	CACAO	NOCCIOLE	LATTE
EXTRA	1 kg/uovo	1 kg/uovo	2kg/uovo
SUPER	3 kg/uovo	1 kg/uovo	1 kg/uovo

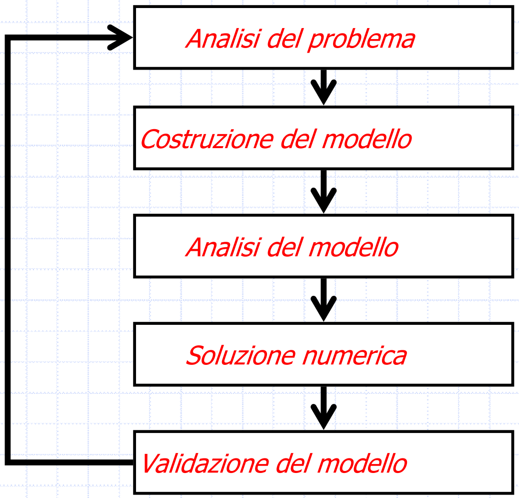
Il problema del pasticciere (II)

Il pasticciere ha a disposizione
- 36 kg di cacao
- 16 kg di noccioline
- 28 kg di latte

Il ricavo delle uova è di
- 40 Euro per ogni uovo Extra
- 60 Euro per ogni uovo Super

Obiettivo
Massimizzare il ricavo con le risorse a disposizione

L'approccio modellistico



Analisi del problema

- Analisi della struttura
- Individuazione dei legami logici e funzionali
- Individuazione degli obiettivi

Problema singolo decisore (il pasticciere !)
Problema singolo criterio (massimizzare il ricavo)
Problema vincolato (le risorse sono limitate)

Costruzione del modello

1. Scelta delle variabili decisionali

   x_1 quantità di uova del tipo Extra
   x_2 quantità di uova del tipo Super

2. Definizione della funzione obiettivo

   Massimizzare il ricavo significa

   max $40\ x_1 + 60\ x_2$

3. Identificazione dei vincoli che descrivono tutte le scelte possibili

Costruzione del modello (II)

3. Identificazione dei vincoli che descrivono tutte le scelte possibili

	CACAO	NOCCIOLE	LATTE
EXTRA	1 kg/uovo	1 kg/uovo	2kg/uovo
SUPER	3 kg/uovo	1 kg/uovo	1 kg/uovo

[Quantità di cacao] $1\ x_1 + 3\ x_2 \leq 36$
[Quantità di nocciole] $1\ x_1 + 1\ x_2 \leq 16$
[Quantità di latte] $2\ x_1 + 1\ x_2 \leq 28$

$x_1,\ x_2 \geq 0$

Analisi del modello

max $40\ x_1 + 60\ x_2$

$1\ x_1 + 3\ x_2 \leq 36$

$1\ x_1 + 1\ x_2 \leq 16$

$2\ x_1 + 1\ x_2 \leq 28$

$x_1,\ x_2 \geq 0$

- esistenza ed unicità delle soluzioni
- caratterizzazione analitica delle soluzioni ottime
- stabilità delle soluzioni rispetto a variazioni dei parametri del modello
- relazioni con altri problemi noti

Soluzione numerica

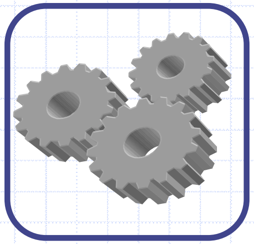
max $40\ x_1 + 60\ x_2$

$1\ x_1 + 3\ x_2 \leq 36$

$1\ x_1 + 1\ x_2 \leq 16$

$2\ x_1 + 1\ x_2 \leq 28$

$x_1,\ x_2 \geq 0$



Soluzione ottima $x_1^* = 6\ x_2^* = 10,\ f(x^*) = 840$

Validazione del modello

- Verifica delle soluzioni
- "Simulazione" delle soluzioni

Nel nostro caso … ho dimenticato lo zucchero !!!!

Quindi:

	ZUCCHERO
EXTRA	15 g/uovo
SUPER	20 g/uovo

A disposizione 500 g di zucchero

Nuovo vincolo: $15\,x_1 + 20\,x_2 \leq 500$

Problema di ottimizzazione

E insieme *ambiente* (insieme di soluzioni, decisioni o alternative) (Es. $E \equiv \Re^n$)

$X \subseteq E$ insieme delle *soluzioni ammissibili* (*regione ammissibile*)

$f : X \to \Re$ *funzione obiettivo*

Problema di ottimizzazione (in forma di min)

Trovare un elemento $x^* \in X$ tale che $f(x^*) \leq f(x)$ $\forall\ x \in X.$

$v = f(x^*)$ *valore ottimo*

x^* *soluzione ottima*

Il problema dell'assegnamento

3 Artigiani 3 Lavori da realizzare

Tabella dei costi

A \ L	1	2	3
1	10	12	20
2	7	15	18
3	14	10	9

Problema

Assegnare esattamente un lavoro ad ogni artigiano in modo da minimizzare i costi

Il problema dell'assegnamento

A \ L	1	2	3
1	10	12	20
2	7	15	18
3	14	10	9

Variabili decisionali

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{lavoro } j \text{ assegnato all'artigiano } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

$\min 10\,x_{11} + 12\,x_{12} + 20\,x_{13} + 7\,x_{21} + 15\,x_{22} + 18\,x_{23} + 14\,x_{31} + 10\,x_{32} + 9\,x_{33}$

Il problema dell'assegnamento

Variabili decisionali

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{lavoro } j \text{ assegnato all'artigiano } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

[ad ogni artigiano un lavoro]

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$

[ogni lavoro ad un artigiano]

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$

Il problema dell'assegnamento

Soluzioni ammissibili

1. $\{a_1 - l_1, a_2 - l_2, a_3 - l_3\}$ di costo 34
2. $\{a_1 - l_2, a_2 - l_3, a_3 - l_1\}$ di costo 44
3. $\{a_1 - l_3, a_2 - l_1, a_3 - l_2\}$ di costo 37
4. $\{a_1 - l_3, a_2 - l_2, a_3 - l_1\}$ di costo 49
5. $\{a_1 - l_2, a_2 - l_1, a_3 - l_3\}$ di costo 28
6. $\{a_1 - l_1, a_2 - l_3, a_3 - l_2\}$ di costo 38

A \ L	1	2	3
1	10	12	20
2	7	15	18
3	14	10	9

La soluzione ottima ha valore 28

I possibili assegnamenti sono $n!$, pertanto il numero delle soluzioni ammissibili è $n!$

Il problema della bisaccia

Avete a disposizione un budget b per gli investimenti dell'anno 2002

Ad ogni progetto è associato
- un costo $a_j (> 0)$
- un profitto atteso $p_j (>0)$

Problema

Scegliere l'insieme di progetti in modo che sia massimizzato il profitto atteso totale senza eccedere il budget b

Il problema della bisaccia

Variabili decisionali

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{il progetto } j \text{ è scelto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

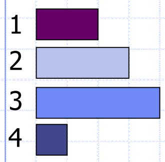
Formulazione

$$\max \sum_{j=1,\ldots,n} p_j x_j$$

$$\sum_{j=1,\ldots,n} a_j x_j \le b$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,\ldots,n$$

Il problema della bisaccia



a	p
2	10
3	14
4	12
1	8

Dimensione della bisaccia
$b = 5$

Soluzioni ammissibili
$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{3,4\}$
Soluzione ottima
$\{1, 2\}$ di valore 24
Quanti sono le soluzioni ammissibili?
Il numero di possibili sottoinsiemi di un insieme di n oggetti è 2^n.
Se $b = \Sigma_{j=1,\ldots,n}\, a_j / 2$ le soluzioni ammissibili sono almeno $2^{n\text{-}1}$

Differenze e similarità

Tutti e 3 i problemi hanno una funzione obiettivo lineare.

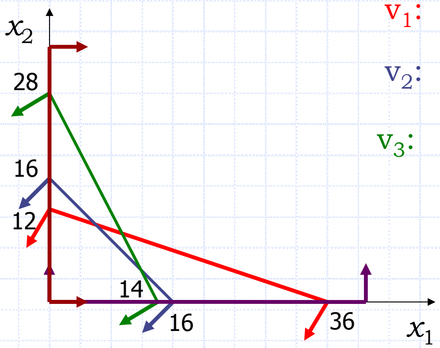
$$f(x) = c^T x$$

MA

- Le soluzioni ammissibili del problema dell'assegnamento e del problema della bisaccia sono numerabili e finite.

- Per trovare la soluzione ottima è sufficiente enumerare tutte le soluzioni.

Rappresentazione grafica



v_1: $1\ x_1 + 3\ x_2 \leq 36$

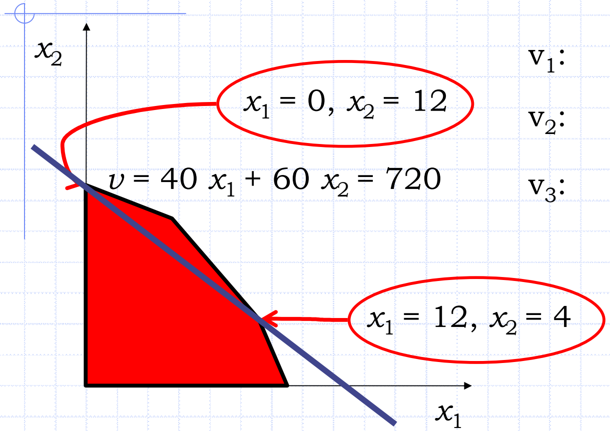
v_2: $1\ x_1 + 1\ x_2 \leq 16$

v_3: $2\ x_1 + 1\ x_2 \leq 28$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

Esempio



v_1: $1\ x_1 + 3\ x_2 \leq 36$

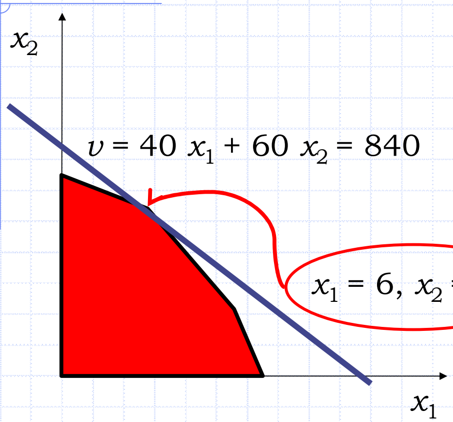
v_2: $1\ x_1 + 1\ x_2 \leq 16$

v_3: $2\ x_1 + 1\ x_2 \leq 28$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

Esempio



v_1: $1\ x_1 + 3\ x_2 \leq 36$

v_2: $1\ x_1 + 1\ x_2 \leq 16$

v_3: $2\ x_1 + 1\ x_2 \leq 28$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

Differenze e similarità

INVECE

Nel caso del problema del pasticciere l'insieme P delle soluzioni ammissibili è definito da un numero finito di disequazioni lineari, ovvero vincoli del tipo

$$a^T x \leq b$$

Dimostreremo che questi vincoli definiscono un sottoinsieme convesso P di $\Re^2$ continuo.

Combinazione lineare

Definizione

Siano $x^1, \ldots, x^k$ punti di $\Re^n$.

z è combinazione lineare di $x^1, \ldots, x^k$ se esistono k numeri reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tali che

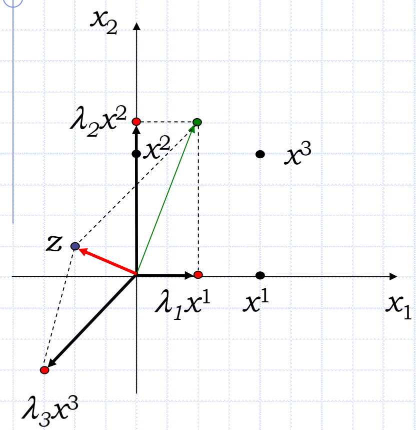
$$z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$$

Esempio

Consideriamo i seguenti $k = 3$ punti di $\Re^2$:

$x^1 = (1, 0)$; $x^2 = (0, 1)$; $x^3 = (1, 1)$

Combinazione lineare



$z = (-1/2,\ 1/4)$

Scegliamo

$\lambda_1 = 1/2$

$\lambda_2 = 5/4$

$\lambda_3 = -1$

otteniamo

$z = 1/2\ (1, 0) + 5/4\ (0, 1) - 1\ (1, 1) = (-1/2,\ 1/4)$

Combinazione lineare

Consideriamo punti di $\Re^2$: $x^1 = (7/2, 1)$, $x^2 = (1, 3/2)$,

È possibile ottenere il punto $z = (-1, 1)$ come combinazione lineare di x^1, x^2?

Algebricamente:

$$\begin{cases} 7/2\ \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ \lambda_1 + 3/2\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Da cui: $\lambda_1 = -10/17$, $\lambda_2 = 18/17$

Quindi:

$z = -\,10/17\ (7/2, 1) + 18/17\ (1, 3/2) = (-1, 1)$

Combinazione lineare

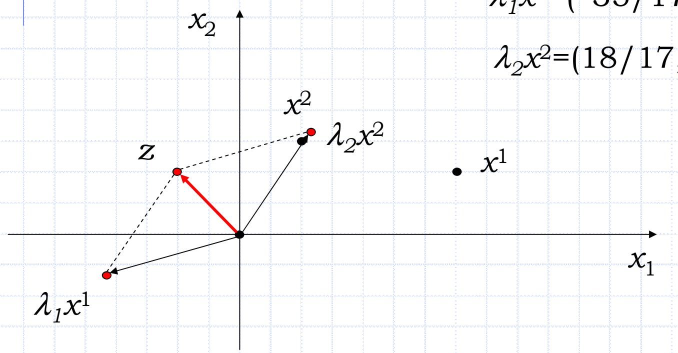
$x^1 = (7/2, 1)$, $x^2 = (1, 3/2)$,

$z = -\,10/17\ (7/2, 1) + 18/17\ (1, 3/2) = (-1, 1)$

Geometricamente:

$\lambda_1 x^1 = (-35/17, -10/17)$

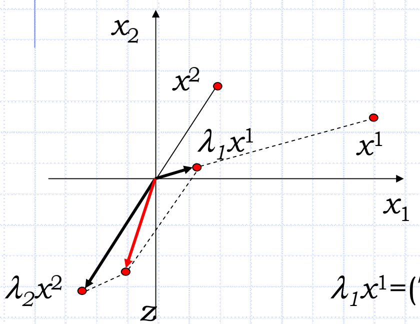
$\lambda_2 x^2 = (18/17, 27/17)$



Combinazione lineare

Consideriamo punti di $\Re^2$: $x^1 = (7/2, 1)$, $x^2 = (1, 3/2)$,

E se scegliessimo il punto $z = (-1/3, -1)$?



$$\begin{cases} 7/2\ \lambda_1 + \lambda_2 = -1/3 \\ \lambda_1 + 3/2\ \lambda_2 = -\,1 \end{cases}$$

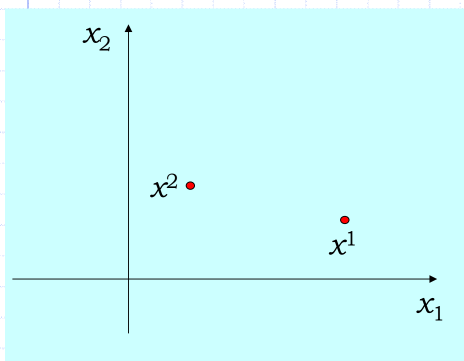
Da cui: $\lambda_1 = 2/17$, $\lambda_2 = -\,38/51$

$\lambda_1 x^1 = (7/17, 2/17)$

$\lambda_2 x^2 = (-38/51, -\,57/51)$

Involucro lineare

Sia S un sottoinsieme qualsiasi di $\Re^n$. Si dice *involucro lineare* di S o *sottospazio generato* da S l'insieme $lin(S)$ di tutte le combinazioni lineari di elementi di S



se S contiene

$x^1 = (7/2, 1)$, $x^2 = (1, 3/2)$

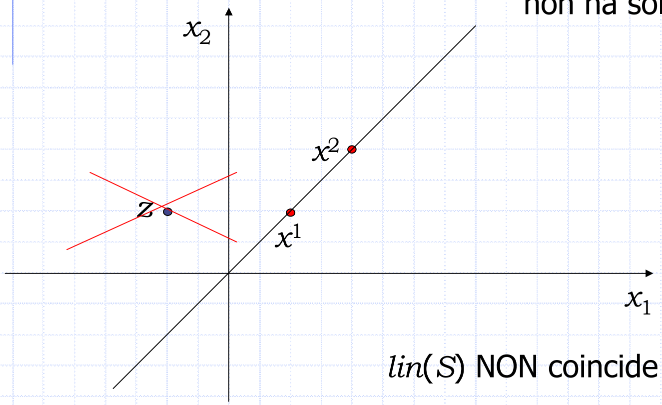
$lin(S)$ coincide con $\Re^2$!!

Involucro lineare: esempio 2

in $\Re^2$:
S contiene
$x^1 = (1, 1)$; $x^2 = (2, 2)$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

non ha soluzione



$lin(S)$ NON coincide con $\Re^2$!!

Indipendenza lineare

Definizione

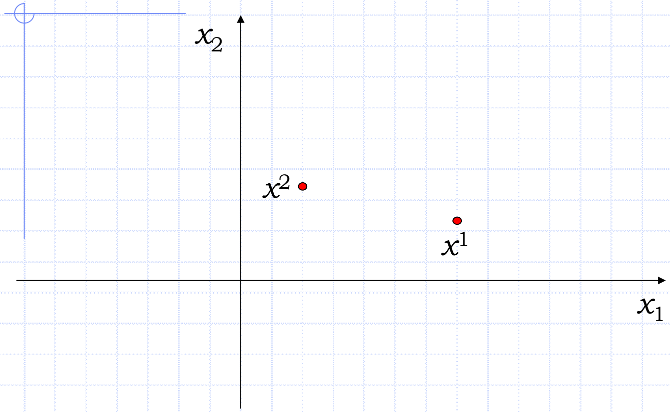
Un **insieme** S=$\{x^1, \ldots, x^k\}$ di punti di $\Re^n$ si dice **linearmente indipendente** se non esistono *k* numeri reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ non tutti nulli tali che

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i = 0_n$$

Definizione

Un **insieme** S=$\{x^1, \ldots, x^k\}$ di punti di $\Re^n$ si dice **dipendente** se non è linearmente indipendente

Esempio: insieme indipendente

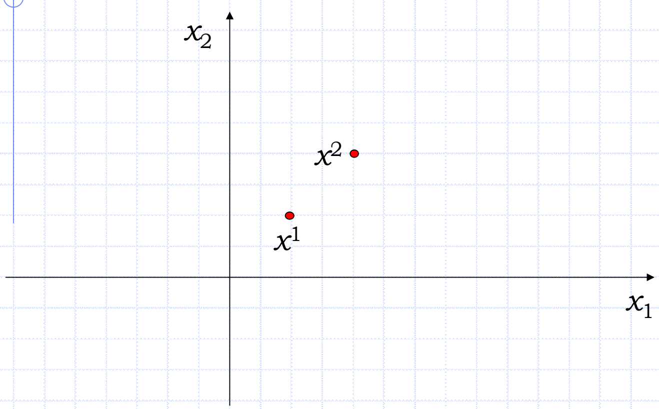


Esempio

S: $x^1 = (7/2, 1)$, $x^2 = (1, 3/2)$

$\lambda_1 (7/2,1) + \lambda_2 (1,3/2) = (0,0)$ se e solo se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Esempio: insieme dipendente



Esempio

S: $x^1 = (1, 1)$; $x^2 = (2, 2)$

$\lambda_1 (1,1) + \lambda_2 (2,2) = (0,0)$ se $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = -1/2$

Proprietà

Ereditarietà rispetto al contenimento

Un sottoinsieme T di un insieme linearmente indipendente S è linearmente indipendente

Conseguenza: un insieme linearmente indipendente non contiene alcun sottoinsieme linearmente dipendente.

L'insieme $\{0_n\}$ è linearmente dipendente

Quindi, il vettore 0_n non appartiene ad alcun insieme linearmente indipendente

Spazi lineari

Definizione

Un insieme $L \subseteq \Re^n$ è uno ***spazio lineare*** (o ***sottospazio*** di $\Re^n$) se e solo se qualsiasi combinazione lineare di ogni sottoinsieme finito di L appartiene a L

cioè:

$\lambda_1 x + \lambda_2 y \in L$ per ogni $x, y \in L$ ed ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \Re$

Osservazione. Ogni spazio lineare contiene il vettore nullo.

Basi

Definizione

Dato un sottospazio S di $\Re^n$, $S \neq \Re^n$, si definisce ***base*** di S una collezione B di vettori linearmente indipendenti tale che ogni vettore di S può essere ottenuto come combinazione lineare di vettori di B (cioè $S = lin(B)$)

Definizione

Data una base $B = \{x^1, \ldots, x^k\}$ di un sottospazio S e un generico vettore $z \in S \backslash B$ si definisce rappresentazione di z rispetto a B il vettore $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ tale che

$$z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$$

Dimensione di uno spazio lineare

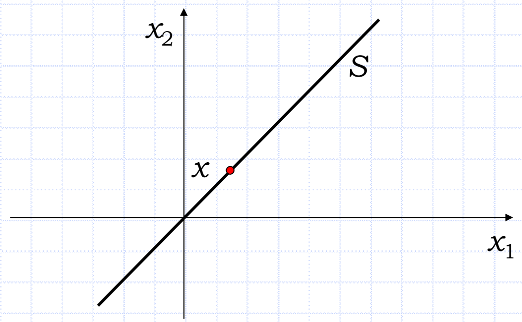
Proprietà

Tutte le basi di un dato sottospazio di $\Re^n$ hanno lo stesso numero di elementi

Definizione

Il numero di elementi di una base di un dato sottospazio S di $\Re^n$ è detto ***dimensione*** del sottospazio

$dim(S) = 1$



Spazio delle colonne di una matrice

Consideriamo una matrice A $(m \times n)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definizione

Si dice RANGO di A la dimensione del sottospazio generato dai vettori colonna di A

Se $rango\,(A) = min\{m,n\}$ allora si dice che la matrice ha rango pieno

Basi di A

$$\left[\boxed{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}3\\1\end{matrix}}\ \begin{matrix}1\\0\end{matrix}\ \begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right] \quad \left[\boxed{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}}\ \begin{matrix}3\\1\end{matrix}\ \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}}\ \begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right] \quad \left[\boxed{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}}\ \begin{matrix}3\\1\end{matrix}\ \begin{matrix}1\\0\end{matrix}\ \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}\right]$$

$$\left[\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\ \boxed{\begin{matrix}3\\1\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}}\ \begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right] \quad \left[\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\ \boxed{\begin{matrix}3\\1\end{matrix}}\ \begin{matrix}1\\0\end{matrix}\ \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}\right] \quad \left[\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\ \begin{matrix}3\\1\end{matrix}\ \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}\right]$$

Funzioni lineari

Definizione

Dati due spazi lineari $S \subseteq \Re^n$ e $T \subseteq \Re^m$ si dice *funzione lineare* una funzione $f: S \rightarrow T$ tale che, per ogni coppia $x,y \in S$ ed qualunque scalare $k \in \Re$

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(kx) = kf(x)$$

Funzioni lineari

Si può dimostrare che ogni funzione lineare f da $\Re^n$ a $\Re^m$ può rappresentare con una matrice $A(m \times n)$

$$\{y \in \Re^m : y = f(x),\ x \in \Re^n\} = \{y \in \Re^m : y = Ax,\ x \in \Re^n\}$$

Caso speciale f da $\Re^n$ a $\Re$

$$\boxed{f(x) = c^T x}$$

Combinazione conica

Definizione

Siano $x^1, \ldots, x^k$ punti di $\Re^n$.

z è **combinazione conica** di $x^1, \ldots, x^k$ se:

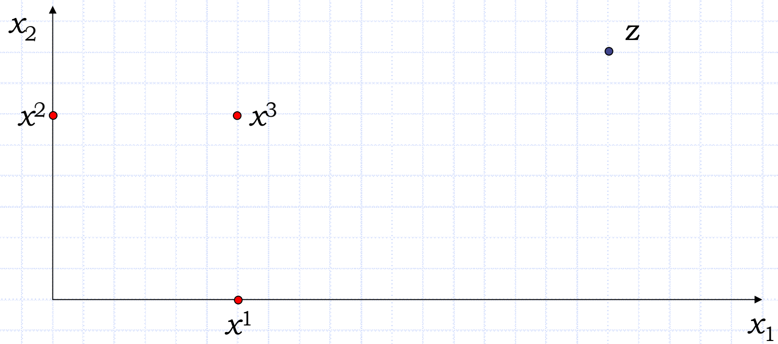
$$z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \text{ con } \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$$

Esempio

Consideriamo i seguenti k = 3 punti di $\Re^2$:

x^1= (1, 0); x^2 = (0, 1); x^3 = (1, 1)

Combinazione conica



Scegliendo λ_1=2, λ_2 = 1/3, λ_3 = 1

Si ottiene il punto

z = 2 (1, 0) + 1/3 (0, 1) + 1 (1, 1) = (3, 4/3)

Combinazione convessa

Definizione

Siano $x^1, \ldots, x^k$ punti di $\Re^n$.

z è **combinazione convessa** di $x^1, \ldots, x^k$ se

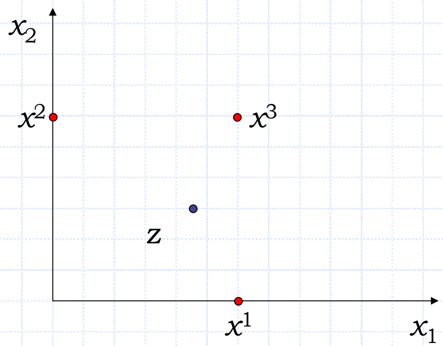
$$z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \text{ con } \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

Esempio

Consideriamo i seguenti tre punti di $\Re^2$:

x^1= (1, 0); x^2 = (0, 1); x^3 = (1, 1)

Combinazione convessa



Scegliendo λ_1=1/2, λ_2 = 1/4, λ_3 = 1/4

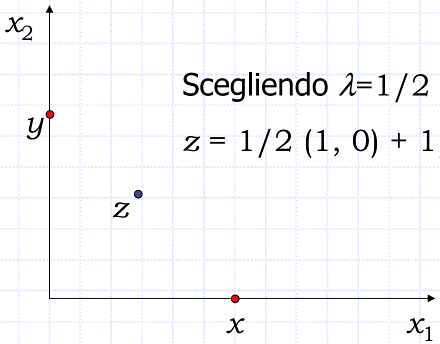
Si ottiene il punto

z = 1/2 (1, 0) + 1/4 (0, 1) + 1/4 (1, 1) = (3/4, 1/2)

Combinazione convessa

Nel caso particolare di due punti x, y di $\Re^n$ la combinazione convessa si scrive

$$z = \lambda x + (1-\lambda)\, y$$



Scegliendo λ=1/2 si ottiene il punto

z = 1/2 (1, 0) + 1/2 (0, 1) = (1/2, 1/2)

Riassumendo

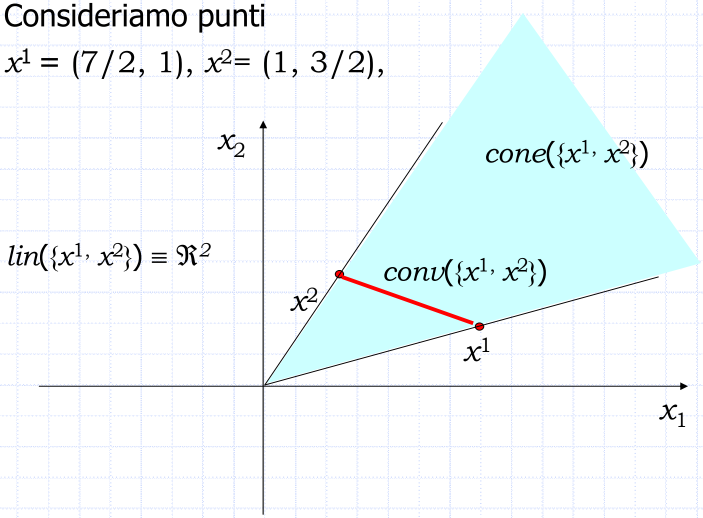
S={x^1, …, x^k} di punti di $\Re^n$

Tipo di combinazione	Ipotesi sui coefficienti	Insieme generato
lineare	Nessuna	Involucro lineare $lin\,(S)$
conica	$\lambda_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,k$	Involucro conico $cone\,(S)$
convessa	$\sum \lambda_i = 1$ $\lambda_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,k$	Involucro convesso $conv\,(S)$

Riassumendo

Consideriamo punti

x^1 = (7/2, 1), x^2= (1, 3/2),



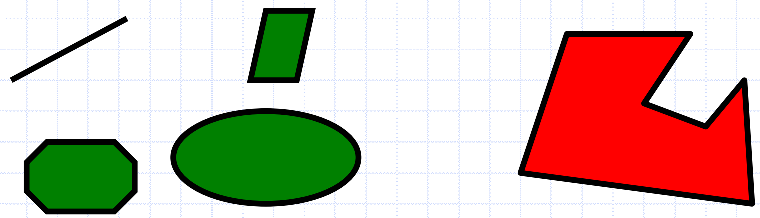
Insiemi convessi

Definizione

$X \subseteq \Re^n$ è convesso se per ogni x, $y \in X$ tutte le possibili combinazioni convesse di x e y appartengono a X, ovvero

$$z = \lambda x + (1-\lambda)\, y \in X, \forall \lambda \in [0,1]$$

Esempi



Intersezione di insiemi convessi

Teorema

Siano A, $B \subseteq \Re^n$ insiemi convessi. Allora $A \cap B$ è un insieme convesso.

Dimostrazione

Siano x e y appartenenti a $A \cap B$. Comunque scelto un $\lambda \in [0, 1]$ si ha che:

1. $z = \lambda x + (1 - \lambda)\, y$ appartiene ad A, perché A è convesso
2. $z = \lambda x + (1 - \lambda)\, y$ appartiene a B, perché B è convesso

Quindi, $z \in A \cap B$, ovvero $A \cap B$ è convesso.

Funzioni convesse

Definizione

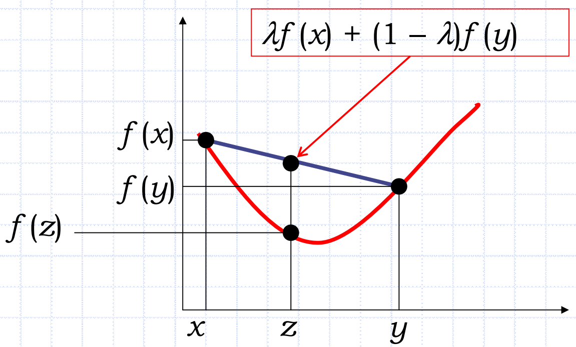
Una funzione $f: X \rightarrow \Re$, $X \subseteq \Re^n$ insieme convesso, si dice convessa se per ogni $x, y \in X$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$ si ha che:

$$f(z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$
$$\text{con } z = \lambda x + (1-\lambda) y$$

Osservazione

Se la funzione f fosse lineare la disuguaglianza varrebbe all'uguaglianza

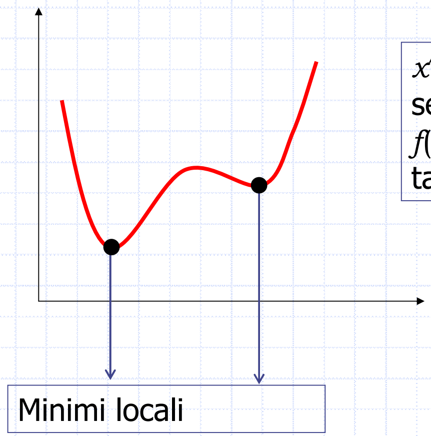
Esempio



Quindi

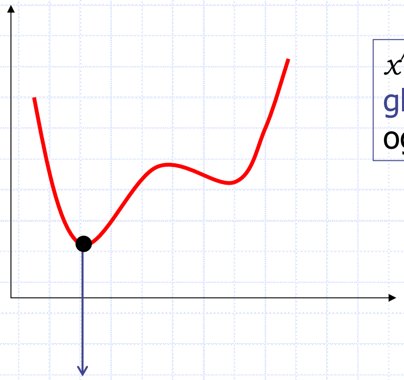
la disuguaglianza implica che, sul segmento $[x,y]$, il grafico di f giace non al di sopra della corrispondente funzione lineare

Punti di minimo



$x\hat{}$ punto di minimo locale se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $f(x\hat{}) \leq f(x)$ per ogni $x \in X$ tale che $|| x - x\hat{} || \leq \varepsilon$

Punti di minimo globale



$x^\wedge$ punto di minimo globale se $f(x^\wedge) \leq f(x)$ per ogni $x \in X$

Minimo globale

Proprietà dei problemi di progr. convessa

Definizione

$\min f(x) : x \in X$ si dice problema di programmazione convessa se X è convesso e $f(x)$ è convessa su X.

Teorema

In un problema di programmazione convessa ogni punto di minimo locale è anche di minimo globale.

Dimostrazione

Sia $x^\wedge \in X$ un punto di minimo locale.

Allora,

$\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $f(x^\wedge) \leq f(z)$ per ogni $z \in I_\varepsilon(x^\wedge) = \{x \in X: \|x - x^\wedge\| \leq \varepsilon\}$

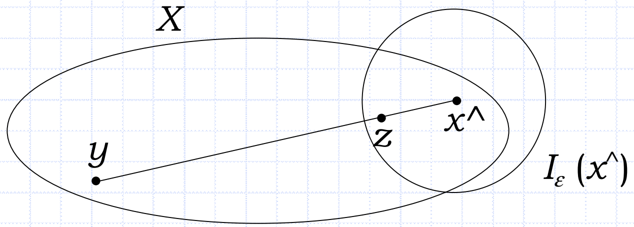
Dimostriamo che $f(x^\wedge) \leq f(y)$ per un generico $y \in X$

Dimostrazione (segue)

Sia y un punto di X qualsiasi e

$z = \lambda x^\wedge + (1-\lambda)y$

$z \in I_\varepsilon(x^\wedge)$ $\quad\quad$ $[\lambda \approx 1]$



Dimostrazione (segue)

Dalla convessità di $f(x)$ segue che:

$$f(x^\wedge) \leq f(z) = f(\lambda x^\wedge + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x^\wedge) + (1-\lambda) f(y)$$

Ovvero:

$$(1-\lambda) f(x^\wedge) \leq (1-\lambda) f(y)$$

Ma $(1-\lambda)$ è una quantità > 0, quindi, dividendo per $(1-\lambda)$ si ottiene

$$f(x^\wedge) \leq f(y)$$

□

Programmazione Lineare

Un problema "generico" di Programmazione Lineare ha la forma:

$$\begin{array}{llll} \min & c^{\mathrm{T}}x & & \\ a_i^{\mathrm{T}}x & \geq & b_i & i \in M_1 \\ a_i^{\mathrm{T}}x & \leq & b_i & i \in M_2 \\ a_i^{\mathrm{T}}x & = & b_i & i \in M_3 \\ x_j & \geq & 0 & j \in N_1 \\ x_j & \leq & 0 & j \in N_2 \end{array}$$

Problemi equivalenti e forma standard

- Due problemi P^1 e P^2 di PL si dicono equivalenti se data una qualunque soluzione ammissibile di P^1 posso costruire una soluzione ammissibile di P^2 avente lo stesso costo.
- In particolare, i due problemi hanno lo stesso valore di soluzione ottima e data una soluzione ottima di P^1 possiamo costruire una soluzione ottima di P^2.

Forma standard	Forma generale
$\min c^{\mathrm{T}}x$	$\min c^{\mathrm{T}}x$
$Ax = b$	$Ax \geq b$
$x \geq 0$	

Trasformazione di problemi

Da problema generico a forma standard

1. Funzione obiettivo

$\max w^{\mathrm{T}}x = -\min c^{\mathrm{T}}x$ con $c = -w$

2. Variabili non vincolate in segno

Sostituiamo ogni variabile x_j non vincolata in segno con la differenza di due variabili x_j^+ e x_j^- vincolate:

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$

Esempio:

$x_1 - x_2 = 3$ diventa $x_1^+ - x_1^- - x_2 = 3$

$x_2 \geq 0$ $\qquad x_1^+, x_1^-, x_2 \geq 0$

Trasformazione di problemi (2)

2. Vincoli di disuguaglianza

Caso 1.

$x_1 - x_2 \leq 3$ diventa $x_1 - x_2 + s_1 = 3$

$s_1 \geq 0$

La variabile s_1 si chiama variabile di *slack*

Caso 2.

$x_1 - x_2 \geq 3$ diventa $x_1 - x_2 - s_1 = 3$

$s_1 \geq 0$

La variabile s_1 si chiama variabile di *surplus*

Esempio

Trasformare in forma standard il seguente problema di PL: Passo 1.

$$\begin{aligned} &\max\ 3x_1 + 2x_2 \\ &\text{st} \\ &x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ &x_1 + 4x_2 \leq 2 \\ &x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-\min\ -3x_1 - 2x_2 \\ &\text{st} \\ &x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ &x_1 + 4x_2 \leq 2 \\ &x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Esempio

Passo 2.

$$\begin{aligned} &\min\ -3x_1 - 2x_2 \\ &\text{st} \\ &x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ &x_1 + 4x_2 \leq 2 \\ &x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\min\ -3x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- \\ &\text{st} \\ &x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- \geq 3 \\ &x_1 + 4x_2^+ - 4x_2^- \leq 2 \\ &x_1,\ x_2^+,\ x_2^- \geq 0 \end{aligned}$$

Esempio

Passo 3.

$$\begin{aligned} &\min\ -3x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- \\ &\text{st} \\ &x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- \geq 3 \\ &x_1 + 4x_2^+ - 4x_2^- \leq 2 \\ &x_1,\ x_2^+,\ x_2^- \geq 0 \end{aligned}$$

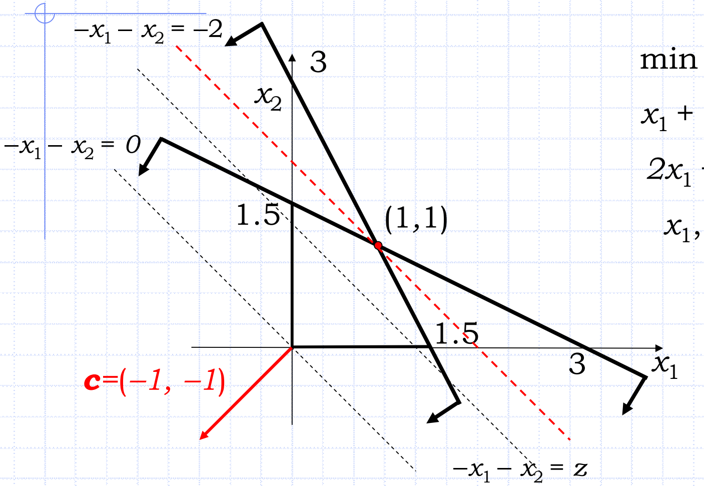
$$\begin{aligned} &\min\ -3x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- \\ &\text{st} \\ &x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- - s_1 = 3 \\ &x_1 + 4x_2^+ - 4x_2^- \leq 2 \\ &x_1,\ x_2^+,\ x_2^-,\ s_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Esempio

Passo 4.

$$\begin{aligned} &\min\ -3x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- \\ &\text{st} \\ &x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- - s_1 = 3 \\ &x_1 + 4x_2^+ - 4x_2^- + s_2 = 2 \\ &x_1,\ x_2^+,\ x_2^-,\ s_1,\ s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

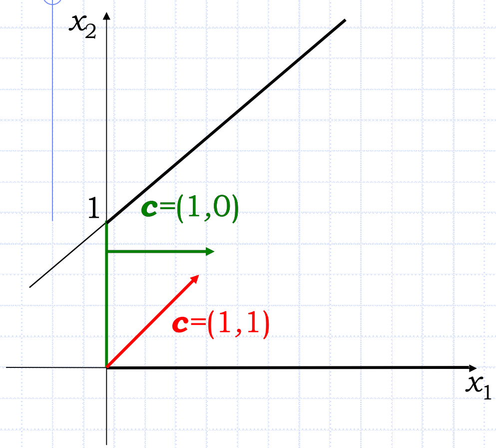
Soluzione dei problemi di PL: metodo grafico



$$\min -x_1 - x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$2x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Dato uno scalare z, consideriamo l'insieme dei punti per cui $c^T x = z$
Il minimo z si ottiene sul punto $(1,1)$ per cui $z = -2$

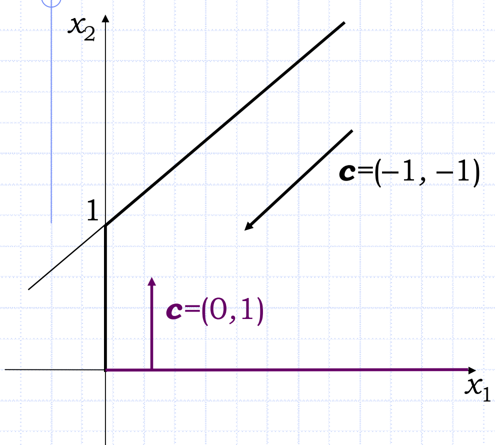
problemi di PL: casi possibili



$$\min c^T x$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(a) **c** = (1,1): x=(0,0) è l'**unica** soluzione ottima
(b) **c** = (1, 0): tutti i vettori x = (0, x_2) con $0 \leq x_2 \leq 1$ sono soluzioni ottime (insieme limitato)

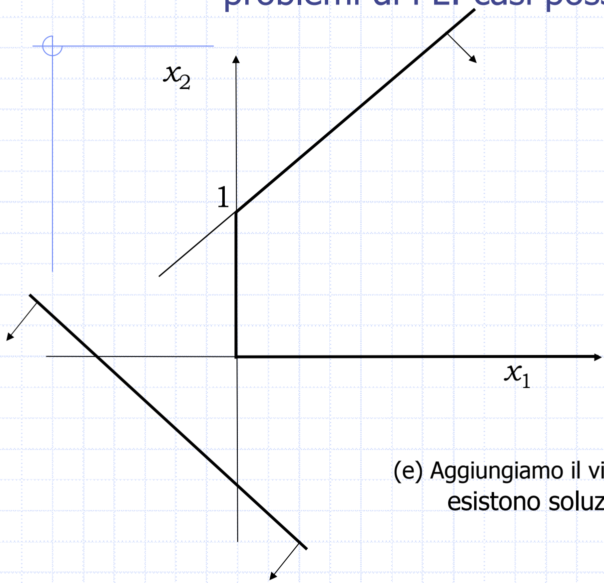
problemi di PL: casi possibili



$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(c) c = (0,1): tutti i vettori $x = (x_1, 0)$ con $x_1 \geq 0$ (insieme illimitato)
(d) c = (–1, –1): per ogni soluzione ammissibile (x_1, x_2) si può sempre costruire un nuova soluzione di valore inferiore. In questo caso si dice che il valore ottimo è $-\infty$

problemi di PL: casi possibili



$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(e) Aggiungiamo il vincolo $x_1 + x_2 \leq -1$: non esistono soluzioni ammissibili

Riassumendo

In un problema di PL si hanno le seguenti possibilità:

(a) esiste un'unica soluzione ottima

(b) esistono diverse soluzioni ottime; queste possono formare un insieme limitato o illimitato

(c) Il valore ottimo è $-\infty$ (quindi non esiste una soluzione ottima)

(d) La regione ammissibile è vuota