Lez 13

Dualità in Programmazione Lineare

Relazione di polarità

Dato il problema in forma standard

min$\{c^T x$: $x \in P\}$, definito sul poliedro non vuoto $P=\{x \geq 0$: $Ax=b\}$

Hp. Ammette soluzione ottima di valore finito

Relazione di *polarità*:

$$\min \{c^T x: x \in P\} = \max_{c0} \{c_0: c^T x \geq c_0, x \in P\}$$

Esempio

$\min -5\ x_1 - 4\ x_2$

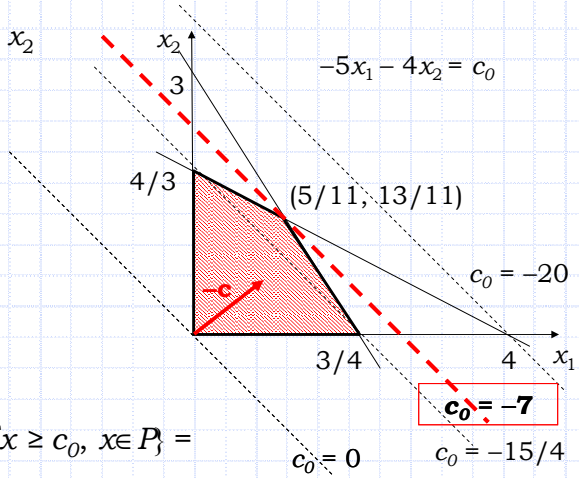
P:

$x_1 + 3\ x_2 \leq 4$

$4\ x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$



$\max_{c0} \{c_0: c^T x \geq c_0, x \in P\} =$

$= \max_{c0} \{c_0: -5x_1 - 4x_2 \geq c_0, x \in P\}$

Disuguaglianze valide

Equivalentemente, detti $x^1,\ldots, x^k$ i vertici di P, e $f_i^T = c^T x_i$ si ha:

$$\min\{f_1,\ldots,f_k\} = \max\{c_0: c_0 \leq f_i, i = 1,\ldots, k\}$$

il problema $\min\{c^T x: x \in P\}$ equivale ad individuare il massimo valore c_0 per cui la disuguaglianza $c^T x \geq c_0$ è verificata per ogni vertice di P, e, quindi, per ogni $x \in$ P. Se il problema è illimitato, allora il problema di massimo è inammissibile.

Definizione

Dato un insieme $X \subseteq \Re^n$, una disuguaglianza $c^T x \geq c_0$ si dice **valida** per X se è soddisfatta da ogni $x \in X$.

Disuguaglianze valide

La soluzione del problema

$$\max_{c0} \{c_0: c^T x \geq c_0, x \in P\}$$

non è calcolabile considerando esplicitamente un vincolo per ciascun punto $x \in P$ (troppo numerosi anche se ci restringiamo ai vertici)

È necessario caratterizzare algebricamente le disuguaglianze valide per P, cioè

determinare le condizioni per cui una coppia (c,c_0) definisce una disuguaglianza valida per un dato $P=\{x \geq 0: Ax=b\}$

Esempio

$P=\{x \geq 0: Ax=b\}$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x4 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Determiniamo una coppia (c,c_0) tale che

$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \geq c_0$

definisca una disuguaglianza valida per $P=\{x \geq 0: Ax=b\}$

Sommiamo le equazioni moltiplicate per due scalari arbitrari u_1 e u_2

$(3u_1-u_2)x_1 + (2u_1+2u_2)x_2 + (-u_1+u_2)x_3 + (-u_2)x_4 = 5u_1+6u_2$

Esempio

$(3u_1-u_2)x_1 + (2u_1+2u_2)x_2 + (-u_1+u_2)x_3 + (-u_2)x_4 = 5u_1+6u_2$

Scegliendo $u_1 = -1$ e $u_2 = 2$ si ottiene

$-5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + -2x_4 = 7$

Soddisfatta per costruzione da ogni $x \in P$. Otteniamo disuguaglianze valide se:

1. Sostituiamo = con $\geq$
2. Riduciamo il termine noto
3. Aumentiamo il coefficiente di alcune variabili ($x_i \geq 0$)

In generale

Dato il sistema $Ax = b$, scegliendo un vettore arbitrario $u \in \Re^m$ otteniamo l'equazione

$$u^T Ax = u^T b$$

da cui otteniamo disuguaglianze $c^T x \geq c_0$ valide per P con

$$c^T \geq u^T A$$

$$c_0 \leq u^T b$$

Esistono disuguaglianze valide che non possono essere generate in questo modo? Cioè,

la condizione sufficiente di validità:

$$\exists u \in \Re^m: c^T \geq u^T A, c_0 \leq u^T b$$

è anche necessaria?

Lemma di Farkas

Teorema. La disuguaglianza $c^T x \geq c_0$ è valide per il poliedro non vuoto P={x≥0:$Ax = b$} se e solo se esiste $u \in \Re^m$ tale che

$$c^T \geq u^T A$$

$$c_0 \leq u^T b$$

Dimostrazione

condizione sufficiente banalmente vera, infatti, per ogni $x \in$ P si ha:

$c^T x \geq u^T A x = u^T b \geq c_0$

Lemma di Farkas

Dimostrazione

condizione necessaria:

$c^T x \geq c_0$ valida per P $\neq \varnothing \Rightarrow \exists\ u \in \Re^m$:

$c^T \geq u^T A$, (1)

$c_0 \leq u^T b$ (2)

Per l'ipotesi di validità si ha:

$$c_0 \leq z^* = \min\{c^T x: Ax=b,\ x \geq 0\}$$

che esclude $z^*=-\infty$. Sia allora x^* una SBA ottima trovata dal metodo del Simplesso e sia B la base. Dimostriamo che il vettore

$u^T = c^T_B B^{-1}$ soddisfa (1) e (2)

Lemma di Farkas

Dimostrazione (continua)

dall'espressione dei costi ridotti calcolati all'ottimo:

$$\bar{c}^T = c^T - \underbrace{c_B^T B^{-1}}_{u^T} A \geq 0^T \Rightarrow c^T \geq u^T A \qquad (1)$$

Inoltre:

$$c_0 \leq z^* = c^T x^* = c_B^T x_B^* + c_F^T x_F^* = c_B^T B^{-1} b = u^T b \qquad (2)$$

□

Problema duale

Riassumendo, <u>se il problema ha un valore ottimo finito</u>:

$\min \{c^T x: Ax=b,\ x \geq 0\} = \max_{c0}\ \{c_0: c^T x \geq c_0$ valida per $P\}$

$= \max_{c0,\ u}\ \{c_0: c_0 \leq u^T b,\ c^T \geq u^T A\}$ [Lemma di Farkas]

$= \max_u\ \{u^T b: c^T \geq u^T A\}$ [infatti all'ottimo $c_0 \leq u^T b$]

problema Primale

$$\min c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0_n$$

problema Duale

$$\max\ u^T b$$
$$u^T A \leq c^T$$

Esempio

PRIMALE

$$\begin{aligned} &\min\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ &s.t. \\ &-x_1+3x_2 \qquad = 5 \\ &2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ &x_1 \geq 0 \\ &x_2 \geq 0 \\ &x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

DUALE

$$\begin{aligned} &\max\ 5u_1 + 6u_2 \\ &s.t. \\ &-u_1+2u_2 \leq 1 \\ &3u_1 - u_2 \leq 2 \\ &3u_2 \leq 3 \end{aligned}$$

Dalla forma canonica...

Primale

$$\begin{aligned} &\min\ c^T x \\ &Ax \geq b \\ &x \geq 0_n \end{aligned}$$

Forma standard

$$\begin{aligned} &\min\ c^T x + 0^T s \\ &Ax - Is = b \\ &x, s \geq 0_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max\ u^T b \\ &u^T A \leq c^T \\ &u^T(-I) \leq 0^T \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\max\ u^T b \\ &u^T A \leq c^T \\ &u \geq 0 \end{aligned}$$

Duale

Dalla forma generica...

PRIMALE **DUALE**

	$\min c^T x$	$\max u^T b$	
vincoli	$a_i^T x \geq b_i, \quad i \in M_1$	$u_i \geq 0, \quad i \in M_1$	variabili
	$a_i^T x \leq b_i, \quad i \in M_2$	$u_i \leq 0, \quad i \in M_2$	
	$a_i^T x = b_i, \quad i \in M_3$	u_i libero $, i \in M_3$	
variabili	$x_j \geq 0, \quad j \in N_1$	$u^T A_j \leq c_j, j \in N_1$	vincoli
	$x_j \leq 0, \quad j \in N_2$	$u^T A_j \geq c_j, j \in N_2$	
	x_j libero $, j \in N_3$	$u^T A_j = c_j, j \in N_3$	

Esempio

PRIMALE

$$\begin{aligned} &\min\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ &s.t. \\ &-x_1+3x_2 \qquad = 5 \\ &2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ &\qquad\qquad x_3 \leq 4 \\ &x_1 \geq 0 \\ &x_2 \leq 0 \\ &x_3 \text{ libero} \end{aligned}$$

DUALE

$$\begin{aligned} &\max\ 5u_1 + 6u_2 + 4u_3 \\ &s.t. \\ &u_1 \text{ libero} \\ &u_2 \geq 0 \\ &u_3 \leq 0 \\ &-u_1+2u_2 \qquad \leq 1 \\ &3u_1 - u_2 \qquad \geq 2 \\ &\qquad 3u_2 + u_3 = 3 \end{aligned}$$

Duale del duale

trasformiamo il precedente duale in forma di minimo, rinominiamo le variabili e moltiplichiamo i vincoli per -1. Quindi ne costruiamo il duale:

$$
\begin{array}{l}
min\ -5x_1 - 6x_2 - 4x_3 \\
s.t. \\
x_1\ libero \\
x_2 \geq 0 \\
x_3 \leq 0 \\
\quad x_1 - 2x_2 \geq -1 \\
-3x_1 + x_2 \leq -2 \\
\quad -3x_2 - x_3 = -3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
min\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
s.t. \\
-x_1 + 3x_2 = 5 \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6 \\
x_3 \leq 4 \\
x_1 \geq 0 \\
x_2 \leq 0 \\
x_3\ libero
\end{array}
$$

Si ottiene un problema equivalente al problema di partenza:
il duale del duale è il primale.

Dualità forte

Teorema. Sia P={x $\geq$ 0: $Ax \geq b$} non vuoto e sia min $\{c^T x: Ax \geq b, x \geq 0\}$ finito. Allora:

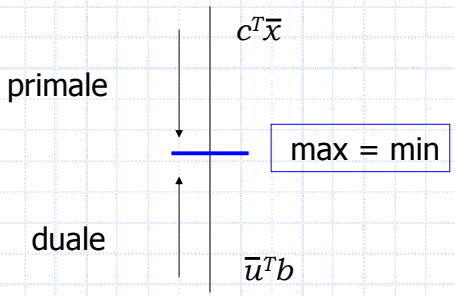
$$\min \{c^T x: Ax \geq b, x \geq 0\} = \max_u \{u^T b: c^T \geq u^T A, u \geq 0\}$$

il risultato non vale se il primale è inammissibile o illimitato.

Dualità debole

Teorema. Siano P={x $\geq$ 0: $Ax \geq b$} D={$u \geq 0$: $c^T \geq u^T A$} non vuoti. Per ogni coppia di punti $\bar{x} \in$ P e $\bar{u} \in$ D si ha che

$$\bar{u}^T b \leq c^T \bar{x}$$



Corollario

DUALE

PRIMALE	Ottimo finito	Illimitato	Inammissibile
Ottimo finito	possibile	impossibile	impossibile
Illimitato	impossibile	impossibile	possibile
Inammissibile	impossibile	possibile	possibile