

Lez 13

Dualità in Programmazione Lineare

Relazione di polarità

Dato il problema in forma standard
 $\min\{c^T x: x \in P\}$, definito sul poliedro non vuoto $P = \{x \geq 0: Ax = b\}$

Hp. Ammette soluzione ottima di valore finito

Relazione di *polarità*:

$$\min \{c^T x: x \in P\} = \max_{c_0} \{c_0: c^T x \geq c_0, x \in P\}$$

Esempio

$$\min -5x_1 - 4x_2$$

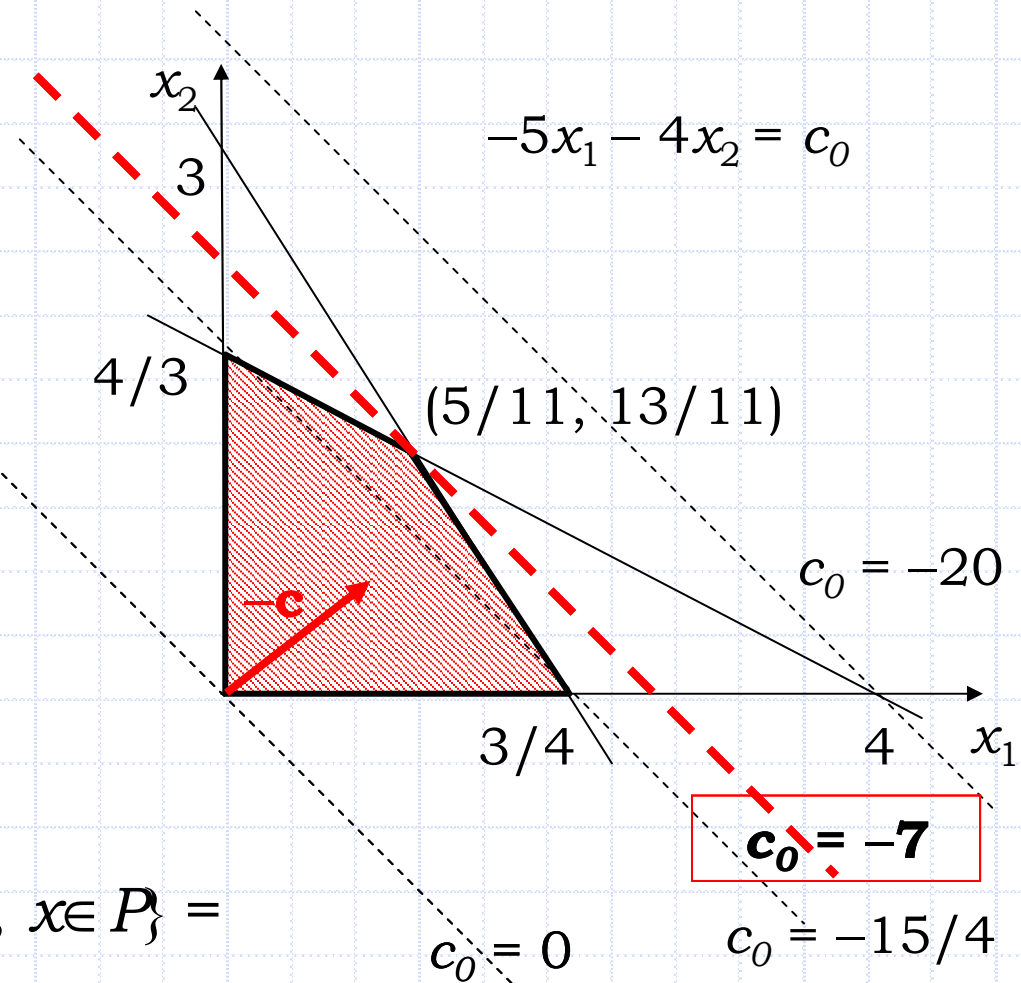
P :

$$x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$4x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



$$\max_{c_0} \{c_0: c^T x \geq c_0, x \in P\} =$$

$$= \max_{c_0} \{c_0: -5x_1 - 4x_2 \geq c_0, x \in P\}$$

Disuguaglianze valide

Equivalentemente, detti x^1, \dots, x^k i vertici di P , e $f_i^T = c^T x_i$ si ha:

$$\min\{f_1, \dots, f_k\} = \max\{c_0: c_0 \leq f_i, i = 1, \dots, k\}$$

il problema $\min\{c^T x: x \in P\}$ equivale ad individuare il massimo valore c_0 per cui la disuguaglianza $c^T x \geq c_0$ è verificata per ogni vertice di P , e, quindi, per ogni $x \in P$. Se il problema è illimitato, allora il problema di massimo è inammissibile.

Definizione

Dato un insieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$, una disuguaglianza $c^T x \geq c_0$ si dice **valida** per X se è soddisfatta da ogni $x \in X$.

Disuguaglianze valide

La soluzione del problema

$$\max_{c_0} \{c_0: c^T x \geq c_0, x \in P\}$$

non è calcolabile considerando esplicitamente un vincolo per ciascun punto $x \in P$ (troppo numerosi anche se ci restringiamo ai vertici)

È necessario caratterizzare algebricamente le disuguaglianze valide per P , cioè

determinare le condizioni per cui una coppia (c, c_0) definisce una disuguaglianza valida per un dato $P = \{x \geq 0: Ax = b\}$

Esempio

$$P = \{x \geq 0 : Ax = b\}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Determiniamo una coppia (c, c_0) tale che

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \geq c_0$$

definisca una disuguaglianza valida per $P = \{x \geq 0 : Ax = b\}$

Sommiamo le equazioni moltiplicate per due scalari arbitrari

$$u_1 \text{ e } u_2$$

$$(3u_1 - u_2)x_1 + (2u_1 + 2u_2)x_2 + (-u_1 + u_2)x_3 + (-u_2)x_4 = 5u_1 + 6u_2$$

Esempio

$$(3u_1 - u_2)x_1 + (2u_1 + 2u_2)x_2 + (-u_1 + u_2)x_3 + (-u_2)x_4 = 5u_1 + 6u_2$$

Scegliendo $u_1 = -1$ e $u_2 = 2$ si ottiene

$$-5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + -2x_4 = 7$$

Soddisfatta per costruzione da ogni $x \in P$. Otteniamo disuguaglianze valide se:

1. Sostituiamo $=$ con \geq
2. Riduciamo il termine noto
3. Aumentiamo il coefficiente di alcune variabili ($x_i \geq 0$)

In generale

◉ Dato il sistema $Ax = b$, scegliendo un vettore arbitrario $u \in \mathbb{R}^m$ otteniamo l'equazione

$$u^T Ax = u^T b$$

da cui otteniamo disuguaglianze $c^T x \geq c_0$ valide per P
con

$$c^T \geq u^T A$$

$$c_0 \leq u^T b$$

Esistono disuguaglianze valide che non possono essere generate in questo modo? Cioè, la condizione sufficiente di validità:

$$\exists u \in \mathbb{R}^m: c^T \geq u^T A, c_0 \leq u^T b$$

è anche necessaria?

Lemma di Farkas

Teorema. La disuguaglianza $c^T x \geq c_0$ è valida per il poliedro non vuoto $P = \{x \geq 0 : Ax = b\}$ se e solo se esiste $u \in \Re^m$ tale che

$$\begin{aligned} c^T &\geq u^T A \\ c_0 &\leq u^T b \end{aligned}$$

Dimostrazione

condizione sufficiente banalmente vera, infatti, per ogni $x \in P$ si ha:

$$c^T x \geq u^T Ax = u^T b \geq c_0$$

Lemma di Farkas

Dimostrazione

condizione necessaria:

$c^T x \geq c_0$ valida per $P \neq \emptyset \Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}^m$:

$$c^T \geq u^T A, \quad (1)$$

$$c_0 \leq u^T b \quad (2)$$

Per l'ipotesi di validità si ha:

$$c_0 \leq z^* = \min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$$

che esclude $z^* = -\infty$. Sia allora x^* una SBA ottima trovata dal metodo del Simplexso e sia B la base. Dimostriamo che il vettore

$$u^T = c^T B^{-1} \quad \text{soddisfa (1) e (2)}$$

Lemma di Farkas

Dimostrazione (continua)

dall'espressione dei costi ridotti
calcolati all'ottimo:

$$\bar{c}^T = c^T - \underbrace{c_B^T B^{-1} A}_{u^T} \geq 0^T \Rightarrow c^T \geq u^T A \quad (1)$$

Inoltre:

$$c_0 \leq z^* = c^T x^* = c_B^T x_B^* + c_F^T x_F^* = c_B^T B^{-1} b = u^T b \quad (2)$$

□

Problema duale

Riassumendo, se il problema ha un valore ottimo finito:

$$\min \{c^T x: Ax=b, x \geq 0\} = \max_{c_0} \{c_0: c^T x \geq c_0 \text{ valida per } P\}$$

$$= \max_{c_0, u} \{c_0: c_0 \leq u^T b, c^T \geq u^T A\} \quad [\text{Lemma di Farkas}]$$

$$= \max_u \{u^T b: c^T \geq u^T A\} \quad [\text{infatti all'ottimo } c_0 \leq u^T b]$$

problema Primale

$$\min c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0_n$$

problema Duale

$$\max u^T b$$

$$u^T A \leq c^T$$

Esempio

PRIMALE

$$\min x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

s.t.

$$-x_1 + 3x_2 = 5$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

DUALE

$$\max 5u_1 + 6u_2$$

s.t.

$$-u_1 + 2u_2 \leq 1$$

$$3u_1 - u_2 \leq 2$$

$$3u_2 \leq 3$$

Dalla forma canonica...

Primale

$$\min c^T x$$

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0_n$$

Forma standard

$$\min c^T x + 0^T s$$

$$Ax - Is = b$$

$$x, s \geq 0_n$$

$$\max u^T b$$

$$u^T A \leq c^T$$

$$u^T (-I) \leq 0^T$$



$$\max u^T b$$

$$u^T A \leq c^T$$

$$u \geq 0$$

Duale

Dalla forma generica...

PRIMALE

DUALE

vincoli

variabili

variabili

vincoli

$\min c^T x$	$\max u^T b$
$a_i^T x \geq b_i, \quad i \in M_1$	$u_i \geq 0, \quad i \in M_1$
$a_i^T x \leq b_i, \quad i \in M_2$	$u_i \leq 0, \quad i \in M_2$
$a_i^T x = b_i, \quad i \in M_3$	$u_i \text{ libero }, i \in M_3$
$x_j \geq 0, \quad j \in N_1$	$u^T A_j \leq c_j, j \in N_1$
$x_j \leq 0, \quad j \in N_2$	$u^T A_j \geq c_j, j \in N_2$
$x_j \text{ libero }, j \in N_3$	$u^T A_j = c_j, j \in N_3$

Esempio

PRIMALE

$$\min x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

s.t.

$$-x_1 + 3x_2 = 5$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6$$

$$x_3 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \leq 0$$

$$x_3 \text{ libero}$$

DUALE

$$\max 5u_1 + 6u_2 + 4u_3$$

s.t.

$$u_1 \text{ libero}$$

$$u_2 \geq 0$$

$$u_3 \leq 0$$

$$-u_1 + 2u_2 \leq 1$$

$$3u_1 - u_2 \geq 2$$

$$3u_2 + u_3 = 3$$

Duale del duale

trasformiamo il precedente duale in forma di minimo, rinominiamo le variabili e moltiplichiamo i vincoli per -1. Quindi ne costruiamo il duale:

$$\begin{array}{ll} \min & -5x_1 - 6x_2 - 4x_3 \\ \text{s.t.} & \\ & x_1 \text{ libero} \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_3 \leq 0 \\ & x_1 - 2x_2 \geq -1 \\ & -3x_1 + x_2 \leq -2 \\ & -3x_2 - x_3 = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & \\ & -x_1 + 3x_2 = 5 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ & x_3 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \leq 0 \\ & x_3 \text{ libero} \end{array}$$

Si ottiene un problema equivalente al problema di partenza:

il duale del duale è il primale.

Dualità forte

Teorema. Sia $P = \{x \geq 0: Ax \geq b\}$ non vuoto e sia $\min \{c^T x: Ax \geq b, x \geq 0\}$ finito. Allora:

$$\min \{c^T x: Ax \geq b, x \geq 0\} = \max_u \{u^T b: c^T \geq u^T A, u \geq 0\}$$

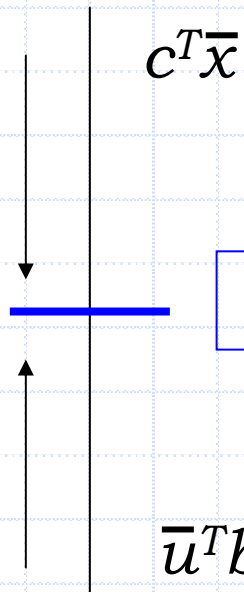
il risultato non vale se il primale è inammissibile o illimitato.

Dualità debole

Teorema. Siano $P = \{x \geq 0: Ax \geq b\}$ $D = \{u \geq 0: c^T \geq u^T A\}$ non vuoti. Per ogni coppia di punti $\bar{x} \in P$ e $\bar{u} \in D$ si ha che

$$\bar{u}^T b \leq c^T \bar{x}$$

primale



duale

Corollario

DUALE

P
R
I
M
A
L
E

	Ottimo finito	Illimitato	Inammissibile
Ottimo finito	possibile	impossibile	impossibile
Illimitato	impossibile	impossibile	possibile
Inammissibile	impossibile	possibile	possibile