

Lez 11-12

Naive vs. Tableau
Metodo del Simplexso Fase I
Esercizi

Complessità di un'iterazione

- Ricordiamo che

operazione	#operazioni aritmetiche
Calcolo matrice inversa B^{-1}	$O(m^3)$
$u^T A_h$	$O(m)$
$B^{-1} A_h, c_B^T B^{-1}$	$O(m^2)$

- Naive vs. tableau

implementazione	#operazioni aritmetiche
Naive	$O(m^3) + O(nm)$
Tableau	$O(mn)$

Fase 1 del simplesso

- Dato un problema in forma standard
 $\min \{c^T x: Ax=b, x \geq 0\}$, con $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$,
si definisce il *problema artificiale*

$$w = \min \sum_{i=1}^m y_i$$

$$Ax + Iy = b$$

$$x, y \geq 0$$

variabili artificiali

Esempio

$$\min 3x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$$

$$x \geq 0$$

Problema artificiale:

$$\min y_1 + y_2$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 + y_1 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + y_2 = 2$$

$$x, y \geq 0$$

Esempio

$$\min y_1 + y_2$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 + y_1 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + y_2 = 2$$

$$x, y \geq 0$$

da cui il tableau:

0	0	0	1	1	0
1	3	4	1	0	1
2	1	3	0	1	2

Forma canonica

0	0	0	1	1	0
1	3	4	1	0	1
2	1	3	0	1	2

Per portare questo tableau in forma canonica rispetto alle variabili y_1 e y_2 è sufficiente sottrarre alla riga 0 tutte le righe del tableau:

-3	-4	-7	0	0	-3
1	3	4	1	0	1
2	1	3	0	1	2

Casi possibili

Sia (x^*, y^*) la soluzione ottima del problema artificiale (ottenuta col simplesso fase 2!)

1. $w > 0$. Non esiste soluzione con $y_i = 0, i = 1, \dots, m$. Cioè, il problema è **inammissibile**
2. $w = 0$. Primo caso:

1. **Le variabili artificiali sono tutte fuori base.**

eliminando le colonne corrisp. a var. artificiali il tableau è in forma canonica risp. a una base. Basta sostituire la f.o. artificiale con quella originaria, portare la riga 0 in forma canonica e applicare la fase 2.

Casi possibili

2. $w=0$. Secondo caso:

Esiste almeno una variabile artificiale y_h in base. Deve essere $y_h = 0$, quindi base degenera.

x_1	x_j	x_n	y_1	y_h	y_n	
				0		0
				0		
				0		
\bar{a}_{i1}	\bar{a}_{ij}	\bar{a}_{in}		1		0
				0		
				0		

$-w$

y_h

ed esiste un elemento $\bar{a}_{ij} \neq 0 \Rightarrow$ si effettua un pivot su (i,j)
e si ripete finché tutte le var. artificiali siano fuori base

Casi possibili

2. $w=0$. Secondo caso:

Esiste almeno una variabile artificiale y_h in base. Deve essere $y_h = 0$, quindi base degenera.

x_1	x_j	x_n	y_1	y_h	y_n	
				0	0	$-w$
				0		
				0		
\bar{a}_{i1}	\bar{a}_{ij}	\bar{a}_{in}		1	0	y_h
				0		
				0		

tutti gli $\bar{a}_{ij} = 0 \Rightarrow$ eliminando le colonne artificiali si ottiene una matrice con una riga nulla: A non ha rango pieno e la riga può essere eliminata

Esempio

-3	-4	-7	0	0	-3
1	3	4	1	0	1
2	1	3	0	1	2

elemento di pivot:
 $\min \{1/4, 2/3\} = 1/4$

pivot:

-5/4	5/4	0	7/4	0	-5/4
1/4	3/4	1	1/4	0	1/4
5/4	-5/4	0	-3/4	1	5/4

Esempio

-5/4	5/4	0	7/4	0	-5/4
1/4	3/4	1	1/4	0	1/4
5/4	-5/4	0	-3/4	1	5/4

elemento di pivot:
 $\min \{1, 1\} = 1$

pivot:

0	0	0	1	1	0
0	1	1	2/5	-1/4	0
1	-1	0	-3/5	4/5	1

Soluzione ottima
 $[1, 0, 0, 0, 0]$
 di valore 0.

Esempio

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
0	0	0	1	1	0
0	1	1	$2/5$	$-1/4$	0
1	-1	0	$-3/5$	$4/5$	1

Dal momento che le variabili y_1 e y_2 valgono entrambe zero e sono entrambe fuori base, posso eliminare dal tableau le colonne y_1 e y_2 e mettere nella riga 0 la f.o. originaria.

Esempio

3	4	6	0
0	1	1	0
1	-1	0	1

Questo tableau non è in forma canonica rispetto alla base $\{x_1, x_3\}$. Per portare in forma canonica il tableau basta sommare alla riga 0 le righe 1 e 2 opportunamente moltiplicate per -6 e per -3:

Esempio

0	1	0	-3
0	1	1	0
1	-1	0	1

A questo punto abbiamo una SBA e una sua rappresentazione in forma canonica, ovvero possiamo avviare la Fase 2 del metodo.

In questo caso, la Fase 2 termina subito, perché la riga 0 soddisfa il test di ottimalità

Fase 1

Passo 1
Selezione di una
SBA x

Problema in forma standard

$$\min c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Problema artificiale

$$\min 1^T y$$

$$Ax + Iy = b$$

$$x, y \geq 0$$

ATTENZIONE
qui b deve
essere
positivo!!!

Soluzione del problema
artificiale (Fase 2!!!!)

Analisi della soluzione ottima
del problema artificiale e
costruzione del tableau (SBA)
iniziale

Esempio del Caso 2


x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
2	1	0	3	0	0
1	1	1	2	0	2
-1	0	0	4	1	0

La variabile y_2 è in base con valore 0.

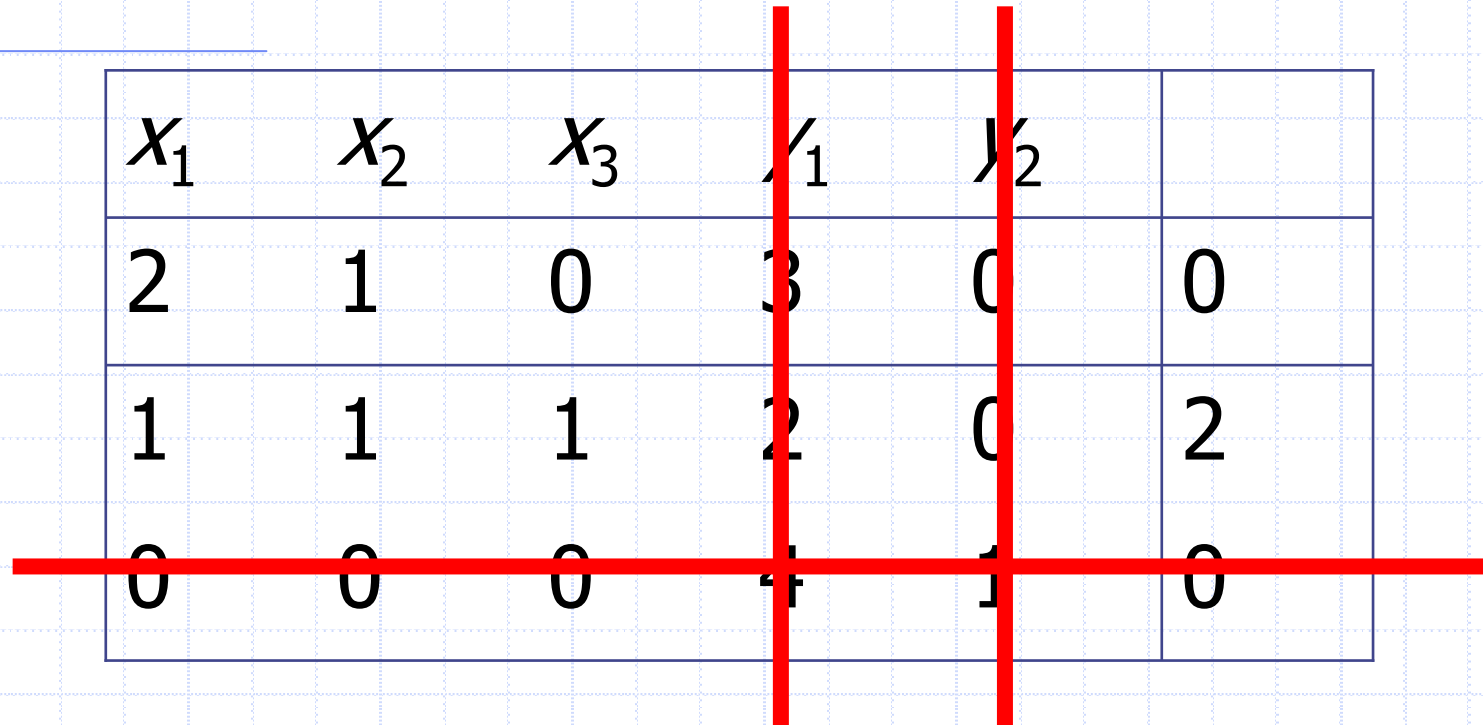
Si effettua un'operazione di pivot su un elemento della riga 2 diverso da zero, scelto tra le colonne di x .

In questo caso si può scegliere anche un valore negativo perché c'è degenerazione e non cambia il valore di f.o.

Esempio del Caso 2



x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
2	1	0	3	0	0
1	1	1	2	0	2
0	0	0	4	1	0



Se non esiste un elemento diverso da zero tra le variabili x della riga 2, allora si possono eliminare contemporaneamente le colonne y e la riga 2, perché ridondante.

Esercizio

$$\min 3x_1 + 4x_2 - 6x_3$$

$$x_1 - x_2 = -3$$

$$4x_2 + x_3 \geq 2$$

$$2x_1 - x_3 \leq 4$$

$$x \geq 0$$

Esercizio

- Forma standard:

$$\min 3x_1 + 4x_2 - 6x_3$$

$$-x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_2 + x_3 - x_4 = 2$$

$$2x_1 - x_3 + x_5 = 4$$

$$x \geq 0$$

Esercizio

- Forma standard:

$$A = \begin{array}{ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Esercizio

- Problema artificiale

$$\min y_1 + y_2$$

$$-x_1 + x_2 + y_1 = 3$$

$$4x_2 + x_3 - x_4 + y_2 = 2$$

$$2x_1 - x_3 + x_5 = 4$$

$$x, y \geq 0$$

Esercizio

- Tableau iniziale per il problema artificiale

1	-5	-1	1	0	0	0	-5
-1	1	0	0	0	1	0	3
0	4	1	-1	0	0	1	2
2	0	-1	0	1	0	0	4

Esercizio

- Tableau iniziale per la fase 2

7	0	-6	0	0	-12
-4	0	-1	1	0	10
-1	1	0	0	0	3
2	0	-1	0	1	4

...