

Il metodo del simplesso

- ▶ implementazione matriciale
- ▶ implementazione "tableau"

rif. Fi 3.2;

Test di ottimalità

Test_Opt

Input: $\mathbf{B}^{-1}$

Output: $\bar{\mathbf{c}}, opt \in \{true, false\}$

INIT. $opt := false$

$$\mathbf{u}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

$$\bar{\mathbf{c}}_F := \mathbf{c}_F - \mathbf{u}^T F$$

TEST **if** $\bar{\mathbf{c}}_F = \mathbf{0}$ **then** $opt := true$

Test di illimitatezza

Test_Illim

Input: $\mathbf{B}^{-1}$, indice h fuori base

Output: $\bar{\mathbf{A}}_h = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_h$, $illim \in \{true, false\}$

INIT. $illim := false$

calcola $\bar{\mathbf{A}}_h = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_h$

TEST **if** $\bar{a}_{ih} \leq 0, i \in \{1, \dots, m\}$ **then** $illim := true$

Metodo del Simplexso (forma matriciale)

Input: $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{B} = [\mathbf{A}_{B(1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(m)}]$

Output: $\mathbf{x}$ sol. ottima **OR** $illim = true$

INIT. $illim := false, opt := false$

MAIN LOOP **while** ($illim = false$ **and** $opt = false$)
 calcola $\mathbf{B}^{-1}$

Test_Opt($\mathbf{B}^{-1}$) $\rightarrow \bar{\mathbf{c}}, opt$

if ($opt = true$) **then return** $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$
VAR. IN **else** scegli $h \notin \{B(1), \dots, B(m)\}$ con $\bar{c}_h < 0$

Test_Illim($\mathbf{B}^{-1}, h$) $\rightarrow \bar{\mathbf{A}}_h, illim$

if ($illim = true$) **then** "STOP: prob. illimitato"
else

VAR. OUT calcola $t := \arg \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{\bar{b}_i / \bar{a}_{ih} : \bar{a}_{ih} > 0\}$

UPDATE $\mathbf{B}$ $B(t) := h$

END LOOP **end_while**

Esempio

$$\min -3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

s.t.

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = -1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Base iniziale:

$$B(1) = 2, B(2) = 3$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3] = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Iter 1.

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Esempio

Test_Opt

$$\mathbf{u}^T = [2 \quad 4] \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} = [10/3 \quad -8/3]$$

$$\bar{c}_1 = -3 - [10/3 \quad -8/3] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$\bar{c}_4 = 0 - [10/3 \quad -8/3] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -10/3$$

$$\bar{c}_5 = 0 - [10/3 \quad -8/3] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 8/3$$

$opt = false \implies$ sceglie **var. entrante** x_4

Test_Illim

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{A}}_4 = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$illim = false \implies$ sceglie **var. uscente** x_t

$$\begin{cases} \frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{14}} = 3 \\ \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{24}} = 3/2 = \theta \end{cases} \implies t = 2, x_{B(2)} = x_3 \text{ **var. uscente**}$$

Esempio

nuova base

$$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Iter 2.

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Test_Opt

$$\mathbf{u}^T = [2 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = [0 \quad -1]$$

$$\bar{c}_1 = -3 - [0 \quad -1] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -2$$

$$\bar{c}_3 = 4 - [0 \quad -1] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 5$$

$$\bar{c}_5 = 0 - [0 \quad -1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

$opt = false \implies$ sceglie **var. entrante** x_1

Esempio

Test_Illim

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

$illim = true \implies$ **STOP: problema illimitato**

Questioni da definire

- ▶ correttezza e convergenza del Metodo del Simplexso
- ▶ individuazione della base iniziale
- ▶ implementazioni efficienti

Il *tableau* del Simplexso

rappresentiamo il problema risp. ad una base:

$\mathbf{c}_B^T$	$\mathbf{c}_F^T$	0
B	F	b

premoltiplichiamo per $\mathbf{B}^{-1}$

$\mathbf{c}_B^T$	$\mathbf{c}_F^T$	0
I	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Il *tableau* del Simpleso

sottraiamo alla riga 0 la matrice premoltiplicata per $\mathbf{c}_B^T$

$\mathbf{c}_B^T - \mathbf{c}_B^T$	$\mathbf{c}_F^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}$	$-\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$
I	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

cioè

$\mathbf{0}^T$	$\mathbf{c}_F^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}$	$-\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$
I	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

rappresentazione in **forma canonica** rispetto alla base **B**

Implementazione Tableau

Input: $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{B} = [\mathbf{A}_{B(1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(m)}]$

Output: $\mathbf{x}$ sol. ottima **OR** $illim = true$

INIT. $illim := false, opt := false$

costruisce il tableau iniziale in forma canonica

MAIN LOOP **while** ($illimitato := false$ **and** $opt := false$)

ROW 0 **if** ($\bar{c}_j \geq 0, j \in F$) **then return** $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$

VAR. IN **else** scegli $h \notin \{B(1), \dots, B(m)\}$ con $\bar{c}_h < 0$

COL h **if** ($\bar{a}_{ih} \leq 0, i = 1, \dots, m$) **then "STOP: prob. illimitato"**
else

VAR. OUT calcola $t := \arg \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{\bar{b}_i / \bar{a}_{ih} : \bar{a}_{ih} > 0\}$

UPDATE $\mathbf{B}$ $PIVOT(t, h)$

$B(t) := h$

END LOOP **end_while**

Esempio

$$\min -2x_1 - 5x_2 - x_3$$

s.t.

$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 4$$

$$5x_2 + x_3 + x_5 = 5$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_6 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

- 2	- 5	- 1	0	0	0	0	
1	3	0	1	0	0	4	x_4
0	5	1	0	1	0	5	x_5
2	4	1	0	0	1	6	x_6

tableau già in forma canonica

Esempio

iter 1

- 2	- 5	- 1	0	0	0	0
1	3	0	1	0	0	4
0	5	1	0	1	0	5
2	4	1	0	0	1	6

x_4

x_5

x_6

var entrante x_2

$$t = \arg \min \{4/3, 1, 6/4\} = 2$$

$\Rightarrow$ var uscente x_5

PIVOT($t = 2, h = 2$): ricavare x_2 dalla riga t "di pivot" e sostituirla nelle altre:

- ▶ normalizzare la riga di pivot $t = 2$
- ▶ sommare alla riga 1 la riga di pivot moltiplicata per -3
- ▶ sommare alla riga 3 la riga di pivot moltiplicata per -4
- ▶ sommare alla riga 0 la riga di pivot moltiplicata per 5

Esempio

iter 2

-2	0	0	0	1	0	5	
1	0	-3/5	1	-3/5	0	1	x_4
0	1	1/5	0	1/5	0	1	x_2
2	0	1/5	0	-4/5	1	2	x_6

var entrante x_1

$$t = \arg \min \{1, 2/2\} = 3$$

$\Rightarrow$ var uscente x_6

PIVOT($t = 3, h = 1$): ricavare x_1 dalla riga 3 "di pivot" e sostituirla nelle altre

iter 3

0	0	1/5	0	1/5	1	7	
0	0	-7/10	1	-1/5	-1/2	0	x_4
0	1	1/5	0	1/5	0	1	x_2
1	0	1/10	0	-2/5	1/2	1	x_1

$$\bar{\mathbf{c}} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

soluzione ottima di valore -7