Problema di programmazione convessa

- funzioni convesse vs. insiemi convessi
- minimi locali e globali
- problema di programmazione convessa

rif. Fi 1.1

Funzioni convesse vs. insiemi convessi

Teorema

Sia

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\}.$$

Se per ogni $i \in \{i, \ldots, m\}$ le funzioni $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono convesse, allora l'insieme X è convesso.

Dimostrazione

Ovviamente $X = \cap_{i=1}^n X_i$, con $X_i = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0\}$. Quindi basta dimostrare che ciascuno degli X_i è convesso.

Infatti, per qualsiasi $x, y \in X_i$ consideriamo una generica combinazione convessa $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, $\lambda \in [0, 1]$. Essendo g_i convessa, $g_i(x) \leq 0, g_i(y) \leq 0$, risulta:

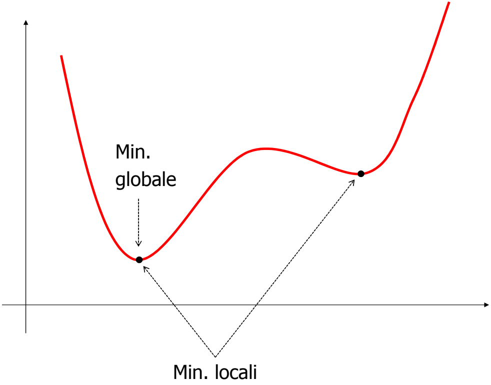
$$g_i(z) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) \leq 0$$

Quindi, $z \in X_i$. $\square$

Minimi locali e globali

$\hat{x}$ si dice punto di *minimo locale* di f su X se esiste $\epsilon > 0$ tale che $f(\hat{x}) \leq f(x)$ per ogni $x \in X$ per cui $||x - \hat{x}|| \leq \epsilon$.

$\hat{x}$ si dice punto di *minimo globale* se $f(\hat{x}) \leq f(x)$, $\forall x \in X$



Programmazione convessa

Definizione

Un problema $\min f(x) : x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice di *programmazione convessa* se X è convesso e $f(x)$ è convessa su X.

Teorema

In un problema di programmazione convessa ogni punto di minimo locale è anche di minimo globale.

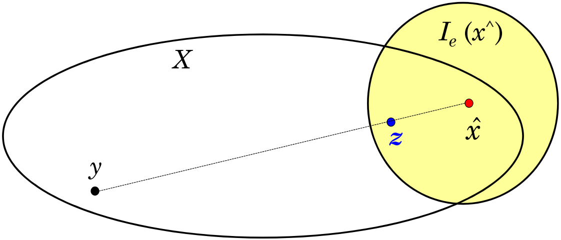
Dimostrazione

Sia $\hat{x}$ un punto di minimo locale di f su X. Allora,

$$\exists \epsilon > 0 \text{ t.c. } f(\hat{x}) \leq f(z), \text{ per ogni } z \in I_\epsilon(\hat{x}) = \{x \in X : ||x - \hat{x}|| \leq \epsilon\}$$

dimostriamo che $f(\hat{x}) \leq f(y)$ per un generico $y \in X$. Sia $z = \lambda\hat{x} + (1 - \lambda)y$, e scegliamo $\lambda \simeq 1$ in modo che $z \in I_\epsilon(\hat{x})$ e, quindi, $f(\hat{x}) \leq f(z)$.

Dimostrazione (continua)



Per l'ipotesi di convessità, si ha:

$$f(\hat{x}) \leq f(z) = f(\lambda\hat{x} + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda)f(y)$$

ovvero:

$$(1-\lambda)f(\hat{x}) \leq (1-\lambda)f(y)$$

dividendo per $(1-\lambda)$ (che è > 0) si ottiene $f(\hat{x}) \leq f(y)$ $\square$

Esercizio

Esercizio Mostrare che un problema $\min f(x) : x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ in cui f è convessa in $\mathbb{R}^n$ ed X non è convesso ammette punti di minimo locale