Metodo del simplesso duale

- analisi duale del metodo del simplesso
- metodo del simplesso duale

Fi 4.6, 4.7

Analisi duale del metodo del simplesso

Condizioni di ottimalità primale-duale per una coppia di vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$:

(i) ammissibilità primale: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

(ii) ammissibilità duale: $\mathbf{u}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$

(iii) scarto complementare: $(\mathbf{c}^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Alla generica iterazione, il metodo del simplesso calcola i vettori:

- $\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}) \geq \mathbf{0}$
- $\mathbf{u}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$
- $\bar{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A}$

e si arresta quando $\bar{\mathbf{c}} \geq \mathbf{0}$

Analisi duale del metodo del simplesso

ad ogni iterazione:

- la sba corrente è ammissibile per il problema primale: (i) è soddisfatta
- $(\mathbf{c}^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = (\mathbf{c}_B^T - \mathbf{u}^T\mathbf{B})\mathbf{x}_B + (\mathbf{c}_F^T - \mathbf{u}^T\mathbf{F})\mathbf{x}_F = \mathbf{0}$: (iii) è soddisfatta
- al contrario, la condizione (ii) è soddisfatta solo quando $\bar{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$, cioè quando **Test_Opt** $\rightarrow true$ e il metodo si arresta

quindi, durante l'intera esecuzione del metodo, il vettore $\mathbf{u}$ non è una soluzione ammissibile del problema duale, mentre lo diventa alla terminazione

Metodo del simplesso duale

- mantiene $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$ tali da soddisfare sempre le condizioni (ii) e (iii), mentre la (i) solo alla terminazione
- $\mathbf{x}$ è una soluzione di base NON ammissibile durante l'intera esecuzione e il metodo si arresta quando ne certifica l'ammissibilità
- tableau iniziale del tipo:

$$
\begin{array}{|ccccc|ccccc|c|c}
x_1 & \cdots & x_j & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_h & \cdots & x_n & & \\
\hline
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \bar{c}_{m+1} & & \bar{c}_h & & \bar{c}_n & \bar{c}_0 & -z \\
\hline
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_{1,m+1} & \cdots & & \cdots & \bar{a}_{1,n} & \bar{b}_1 & x_1 \\
0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \bar{a}_{t,m+1} & \cdots & \bar{a}_{t,h} & \cdots & \bar{a}_{t,n} & \bar{b}_t & x_t \\
0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \bar{a}_{m,m+1} & \cdots & & \cdots & \bar{a}_{m,n} & \bar{b}_m & x_m \\
\hline
\end{array}
$$

in cui $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n \geq 0$ (ammissibilità duale)

Metodo del simplesso duale

- se $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m \geq 0$, allora il tableau è ottimo
- altrimenti (esiste un valore $\bar{b}_t < 0$):
  - se $\bar{a}_{tj} \geq 0, j = 1, \ldots, n$, allora $\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{tj} x_j \geq 0$; quindi, l'equazione associata alla riga t del tableau non può essere soddisfatta: problema inammissibile
  - esiste un valore $\bar{a}_{th} < 0$: facendo PIVOT sull'elemento (t, h) il termine $\bar{b}_t$ diventa positivo
- la scelta della variabile uscente può ricadere su una qualsiasi delle variabili in base per cui $\bar{b}_t < 0$ (ricordando la discussione sul ciclaggio)

Esempio

$$\begin{aligned} \min\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.}\ & \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.}\ & \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_5 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

da cui il tableau:

3	4	5	0	0	0
2	2	1	- 1	0	6
2	1	3	0	- 1	5

applicando il simplesso primale si eseguirebbe la FASE I

Esempio

Invece, cambiando segno alle righe si ottiene un tableau iniziale per il simplesso duale

3	4	5	0	0	0
- 2	- 2	- 1	1	0	- 6
- 2	- 1	- 3	0	1	- 5

scegliamo x_4 (riga $t = 1$) come var. uscente

come scegliere la variabile entrante?

dovendo mantenere l'ammissibilità duale (cioè $\bar{c} \geq \mathbf{0}$), consideriamo esclusivamente i valori $\bar{a}_{tj} < 0$ e scegliamo la colonna h per cui:

$$h = \arg\min\{\frac{\bar{c}_j}{|\bar{a}_{tj}|} : j \in \{1, \ldots, n\}, \bar{a}_{tj} < 0\}$$

Esempio (cont.)

$$\min\{\frac{\bar{c}_1}{\bar{a}_{11}} = \frac{3}{2}, \quad \frac{\bar{c}_2}{\bar{a}_{12}} = 2, \quad \frac{\bar{c}_3}{\bar{a}_{13}} = 5\}$$

$PIVOT(1,1)$

0	1	7/2	3/2	0	-9
1	1	1/2	-1/2	0	3
0	- 1	- 5/2	-1/2	1	-2

l'unica riga con $\bar{b}_t < 0$ è $t = 2$, cioè, x_5 è la variabile entrante. Ripetendo il ragionamento precedente si individua l'elemento di pivot $(2, 2)$:

$PIVOT(2,2)$

0	0	1	1	1	-11
1	0	-2	-1	1	1
0	1	5/2	1/2	-1	2

soluzione $(1, 2, 0, 0, 0)$ ammissibile primale $\Longrightarrow$ ottima

Se aggiungessimo un vincolo?

supponiamo adesso di aggiungere il vincolo

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

che NON è soddisfatto dalla soluzione ottima.

Aggiungendo la slack è possibile includerlo nel tableau:

0	0	1	1	1	0	-11
1	0	-2	-1	1	0	1
0	1	5/2	1/2	-1	0	2
3	1	1	0	0	1	4

Di nuovo simplesso duale...

mettendo in forma canonica (con la slack in base), si ottiene:

0	0	1	1	1	0	-11
1	0	-2	-1	1	0	1
0	1	5/2	1/2	-1	0	2
0	0	9/2	5/2	**-2**	1	**-1**

essendo $\bar{b}_3 < 0$ non abbiamo ammissibilità primale. Applicando nuovamente il simplesso duale si individua l'elemento di pivot $(3, 5)$ e il nuovo tableau (ottimo):

0	0	13/4	9/4	0	1/2	-23/2
1	0	1/4	1/4	0	1/2	1/2
0	1	1/4	-3/4	0	-1/2	5/2
0	0	-9/4	-5/4	1	-1/2	1/2

nuova sol. ottima $(1/2, 5/2, 0, 0, 1/2, 0)$