Interpretazione economica della dualità

- Interpretazione economica delle variabili duali
- Interpretazione economica del problema duale

BT 4.3; Fi 4.4

Interpretazione economica delle variabili duali

Consideriamo un problema $\{\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ e sia $\mathbf{x}^*$ una soluzione ottima non degenere, associata alla base $\mathbf{B}$.
Supponiamo di perturbare il vettore dei termini noti sostituendo $\mathbf{b}$ con $\mathbf{b} + \mathbf{d}$. Allora:

- essendo $\mathbf{B}$ non degenere si ha $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} > \mathbf{0}$, ma allora anche $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{d}) > \mathbf{0}$ per $\mathbf{d}$ "piccolo"; quindi, per $\mathbf{d}$ sufficientemente piccolo $\mathbf{B}$ è ancora una base ammissibile

- essendo $\mathbf{B}$ ottima si ha $\mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ e ciò non cambia dopo la perturbazione; quindi $\mathbf{B}$ è ancora una base ottima

Interpretazione economica delle variabili duali

- quindi, il costo ottimo del problema perturbato è

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}(b+d) = \mathbf{p}^T(b+d)$$

  in cui $\mathbf{p}$ è una soluzione ottima duale

- di conseguenza, se l'i-mo requisito varia di d_i, il costo complessivo varia di $p_i d_i$, quindi p_i può essere interpretato come il suo **costo marginale**

Il problema della dieta

Un nutrizionista deve programmare la dieta per una squadra sportiva, in modo da garantire un certo apporto b_i di ciascuno dei nutrienti fondamentali (zuccheri, grassi, proteine, etc.).
Per ciascun alimento j sul mercato è noto

- il costo unitario c_j
- la qtità a_{ij} di nutriente i contenuta in una unità di j

Determinare una dieta (qtità x_j di alimento $\forall j$) di costo minimo

$$
\begin{aligned}
& z^* = \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad i = 1, \ldots, m \\
& x_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Esempio

Alimento	Eur/Kg	Zuccheri g/Kg	Grassi g/Kg	Proteine g/Kg	Vitamine g/Kg
pasta	2	300	0	1	12
carne	18	0	110	400	30
uova	5	0	300	280	50
latte	6	70	360	10	4
dose giornaliera		90	70	50	7

Il problema del produttore di integratori alimentari

Un'azienda farmaceutica produce "direttamente" i nutrienti e deve decidere il loro prezzo di immissione sul mercato. I suoi prodotti rappresentano alternative per il nutrizionista agli alimenti tradizionali.

Possiamo stimare il ricavo massimo dell'azienda?

Se i prezzi p_i dei nutrienti fossero troppo elevati, il nutrizionista non sarebbe incentivato ad acquistarli: se il prezzo di "sintesi" di un alimento j attraverso i suoi nutrienti fosse superiore al suo prezzo di acquisto, il nutrizionista preferirebbe acquistare l'alimento stesso

quindi, l'azienda ha il seguente vincolo:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \leq c_j, \qquad j = 1, \ldots, n$$

Esempio (cont.)

siano p_Z, p_G, p_P, p_V i prezzi risp. di zuccheri, grassi, proteine, vitamine

ad es. per "sintetizzare" 1 Kg di pasta (che costa 2 Eur) occorrono 300 g di zuccheri, 1 g di proteine e 12 g di vitamine, quindi:

$$300p_Z + p_P + 12p_V \leq 2$$

Il produttore di integratori alimentari risolve il duale!

$$\begin{aligned} & w^* = \max \sum_{i=1}^{m} b_i p_i \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \leq c_j, \qquad j = 1, \ldots, n \\ & p_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{2}$$

- per qualunque scelta ammissibile dei prezzi si ha $\sum_{i=1}^{m} u_i b_i \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$: il nutrizionista preferirà gli integratori
- per il teorema della dualità forte, $z^* = w^*$: il mercato tende ad un equilibrio in cui l'acquirente ha due alternative equivalenti