

## Dualità forte e condizioni di ottimalità

- ▶ Dualità forte
- ▶ Dualità debole
- ▶ Condizioni di scarto complementare

BT 4.3

# Dualità debole

## Teorema

Data una soluzione ammissibile  $\mathbf{x}$  del problema primale (in forma generica) ed una  $\mathbf{p}$  del duale, risulta  $\mathbf{p}^T \mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}$

**Dimostrazione** Definiamo le quantità

$$u_i = p_i(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i) \quad v_j = (c_j - \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j)x_j$$

le regole di costruzione implicano che, in entrambi i casi, le due quantità moltiplicate hanno lo stesso segno, quindi,  $u_i \geq 0, i = 1, \dots, m$  e  $v_j \geq 0, j = 1, \dots, n$ . Risulta anche:

$$\sum_i u_i = \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{p}^T \mathbf{b} \quad \sum_j v_j = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

da cui

$$0 \leq \sum_i u_i + \sum_j v_j = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{p}^T \mathbf{b}$$



# Conseguenze

## Corollario

- (a) se il primale è (inferiormente) illimitato, allora il duale è inammissibile
- (b) se il duale è (superiormente) illimitato, allora il primale è inammissibile

	Ottimo finito	Illimitato	Inammissibile
Ottimo finito		NO	
Illimitato	NO	NO	SI
Inammissibile		SI	

# Dualità forte

## Teorema

Se un problema di PL ha una soluzione ottima anche il suo duale ce l'ha e i rispettivi valori coincidono

## Dimostrazione (forma standard)

Consideriamo un problema

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t. } & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Applicando il metodo del simplex (con una regola anticiclaggio), si calcola una soluzione ottima  $\mathbf{x}^*$  associata alla base  $\mathbf{B}$ . Alla terminazione **Test\_Opt**  $\rightarrow$  *true*:

$$\mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \geq \mathbf{0}^T$$

## Dimostrazione (cont.)

Quindi, definendo  $\mathbf{p}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$  risulta  $\mathbf{p}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$ , cioè,  $\mathbf{p}$  è una soluzione ammissibile del problema duale

$$\max \mathbf{p}^T \mathbf{b}$$

s.t.

$$\mathbf{p}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$$

ed inoltre si ha:

$$\mathbf{p}^T \mathbf{b} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$$

cioè,  $\mathbf{p}$  è una soluzione ottima del problema duale e i due valori ottimi coincidono

□

## Conseguenze

	Ottimo finito	Illimitato	Inammissibile
Ottimo finito	SI	NO	NO
Illimitato	NO	NO	SI
Inammissibile	NO	SI	-

Infine, esistono problemi di PL per cui sia il primale che il duale sono inammissibili.

**Esercizio** Dato il problema primale:

$$\min x_1 + 2x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 = 3$$

scrivere il suo duale e verificare che sono entrambi inammissibili

# Condizioni di scarto complementare

## Teorema

Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{p}$  soluzioni ammissibili risp. per il problema primale e duale. Esse sono ottime se e solo se

$$p_i(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (1)$$

$$(c_j - \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j)x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2)$$

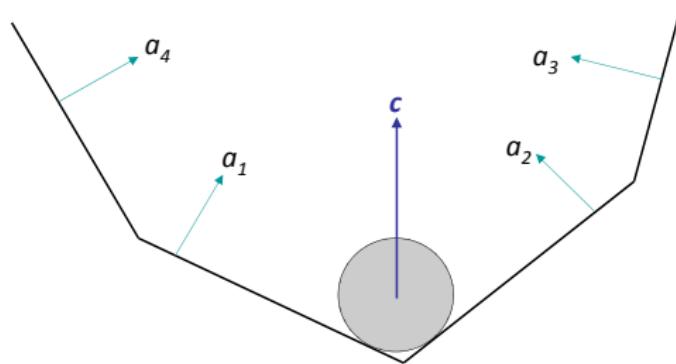
**Dimostrazione** Ricordiamo dalla dimostrazione della dualità debole che  $u_i \geq 0$ ,  $v_j \geq 0$  e che  $\sum_i u_i + \sum_j v_j = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{p}^T \mathbf{b}$ . Quindi, se  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{p}$  sono ottime, per il teorema della dualità forte si ha  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{p}^T \mathbf{b} = 0$ , cioè  $u_i = v_j = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ .

Viceversa, se  $u_i = v_j = 0$  per ogni  $i, j$ , si ha  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{p}^T \mathbf{b} = 0$  che implica  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{p}$  soluzioni ottime. □

## Interpretazione fisica

Una sfera solida giace in un poliedro descritto da diseguaglianze  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b_i$ .

Soggetta alla forza di gravità, la sfera raggiunge il punto di minima energia potenziale  $x^*$ :



possiamo immaginare il punto di equilibrio come la soluzione ottima del problema  $\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i, \forall i$

## Interpretazione fisica

all'equilibrio, la forza di gravità è bilanciata dalle spinte delle pareti, ortogonali alle stesse, cioè allineate ai vettori  $\mathbf{a}_i$ . Quindi, si ha

$$\mathbf{c} = \sum_i p_i \mathbf{a}_i$$

con  $p_i$  moltiplicatori non negativi. Naturalmente, per le pareti che non toccano la sfera si ha  $p_i = 0$ , quindi risulta  $p_i(b_i - \mathbf{a}^T \mathbf{x}^*)$ , cioè,

$$\mathbf{p}^T \mathbf{b} = \sum_i p_i b_i = \sum_i p_i \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$$

In altri termini, il vettore  $\mathbf{p}$  è la soluzione del problema duale

$$\begin{aligned} & \max \mathbf{p}^T \mathbf{b} \\ & \mathbf{p}^T \mathbf{A} = \mathbf{c}^T \\ & \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$