Dualità nella Programmazione Lineare

- Problema duale: definizione e motivazioni
- Dualità nella PL
- Costruzione del problema duale

BT 4.1, 4.2;

Problema duale

Dato un problema di minimo, detto *primale*, del tipo:

$$\begin{aligned} z^* = \min f(x) \\ x \in X \end{aligned}$$

costruiamo un nuovo problema, in forma di massimo, detto *duale*:

$$\begin{aligned} w^* = \max g(p) \\ p \in S \end{aligned}$$

per cui, se $X \neq \emptyset$, $S \neq \emptyset$ risulti

$$z^* \geq w^*$$

(relazione di *dualità debole*)

Condizioni di ottimalità

- Siano $\bar{x} \in X, \bar{p} \in S$. La dualità debole implica che, se
$$f(\bar{x}) = g(\bar{p}) \tag{1}$$
allora $\bar{x}$ e $\bar{p}$ sono ottime per i rispettivi problemi
- per alcune classi di problemi si riesce a definire un problema duale per cui
$$z^* = w^*$$
(relazione di *dualità forte*)
- in questo caso la condizione (1) è necessaria e sufficiente di ottimalità

Dualità nella PL

Iniziamo con un problema $z^* = \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ in forma standard, assumiamo che esista una soluzione ottima $\mathbf{x}^*$

Introduciamo un vettore $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ di moltiplicatori di Lagrange e definiamo il nuovo problema:

$$g(p) = \min \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{p}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Proposizione

Per ogni vettore $\mathbf{p}$ di moltiplicatori, si ha $g(\mathbf{p}) \leq z^*$

Infatti:

$$g(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}} \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{p}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* + \mathbf{p}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$$

$\square$

Problema duale

La migliore limitazione inferiore del valore ottimo primale z^* si ottiene risolvendo problema:

$$\max_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m} g(\mathbf{p})$$

no vincoli

questo è scelto come problema duale (la dualità debole segue dalla Proposizione)

Struttura del problema duale

$$g(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}} \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{p}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T\mathbf{b} + \min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}}(\mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T\mathbf{A})\mathbf{x}$$

Analizziamo il secondo termine

$$\min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}}(\mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = \begin{cases} 0 \text{ se } \mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{0}^T \\ -\infty \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Volendo massimizzare $g(\mathbf{p})$, imponiamo il vincolo che esclude il secondo caso:

$$\max_{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^m} g(\mathbf{p}) \quad \Rightarrow \quad \max \mathbf{p}^T\mathbf{b}$$

no vincoli

$$\mathbf{p}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$$

ancora un PL!

PL in forma generale

Trasformiamo il problema in forma standard e ripetiamo la derivazione precedente:

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{I}\mathbf{s} = \mathbf{b} \\ \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$g(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{x} \text{ free}, \ \mathbf{s} \geq \mathbf{0}} \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{p}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{s}) =$$

$$= \mathbf{p}^T\mathbf{b} + \min_{\mathbf{x} \text{ free}, \ \mathbf{s} \geq \mathbf{0}} (\mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T\mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{p}^T\mathbf{s}$$

PL in forma generale

quindi,

$$\min_{\mathbf{x}\ \text{free}} \ (\mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = \begin{cases} 0 \text{ se } \mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}^T \\ -\infty \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$\min_{\mathbf{s}\geq\mathbf{0}} \mathbf{p}^T\mathbf{s} = \begin{cases} 0 \text{ se } \mathbf{p}^T \geq \mathbf{0}^T \\ -\infty \text{ altrimenti} \end{cases}$$

da cui il problema duale:

$$\begin{aligned} \max \mathbf{p}^T\mathbf{b} \\ \mathbf{p}^T\mathbf{A} = \mathbf{c}^T \\ \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Riassumendo

primale	duale
$\min \mathbf{c}^T\mathbf{x}$	$\max \mathbf{p}^T\mathbf{b}$
$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$	$\mathbf{p}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	
$\min \mathbf{c}^T\mathbf{x}$	$\max \mathbf{p}^T\mathbf{b}$
$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$	$\mathbf{p}^T\mathbf{A} = \mathbf{c}^T$
	$\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$

Regole di costruzione

	primale	duale	
vincoli	$\min \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i, \quad i \in M_1$ $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq b_i, \quad i \in M_2$ $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i, \quad i \in M_3$	$\max \mathbf{p}^T\mathbf{b}$ $p_i \geq 0, \quad i \in M_1$ $p_i \leq 0, \quad i \in M_2$ p_i libero, $\quad i \in M_3$	variabili
variabili	$x_j \geq 0, \quad j \in N_1$ $x_j \leq 0, \quad j \in N_2$ x_j libero, $\quad j \in N_3$	$\mathbf{p}^T\mathbf{A}_j \leq c_j, \quad j \in N_1$ $\mathbf{p}^T\mathbf{A}_j \geq c_j, \quad j \in N_2$ $\mathbf{p}^T\mathbf{A}_j = c_j, \quad j \in N_3$	vincoli