

## Convergenza del Simplex e regole anti-ciclaggio

- ▶ degenerazione e ciclaggio
- ▶ un esempio di ciclaggio
- ▶ regole anti-ciclaggio

rif. Fi 3.2.6, BT 3.4 (Esempio 3.6), BT 3.7;

## Degenerazione e ciclaggio

- ▶ il numero di basi ammissibili è al più  $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
- ▶ se l'algoritmo visita ciascuna base al più una volta, allora converge in un numero finito di iterazioni
- ▶ questo accade se, ad ogni iterazione,  $\theta$  è strettamente positivo: infatti, il valore di f.o. diminuisce in modo strettamente monotono
- ▶ sfortunatamente, in presenza di basi degeneri, cioè di valori  $\bar{b}_i = 0$  si ha  $\theta = 0 \implies$  al cambiamento di base NON corrisponde uno spostamento di vertice
- ▶ può accadere che, dopo un certo numero di scambi degeneri, si riottenga una base già visitata (cioè un tableau già ottenuto)
- ▶ in questo caso il metodo visita ciclicamente e indefinitivamente una sequenza di basi degeneri

## Esempio

-3/4	20	-1/2	6	0	0	0	3
1/4	-8	-1	9	1	0	0	0
1/2	-12	-1/2	3	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1

$x_5$

$x_6$

$x_7$

Regole di pivoting:

- ▶ variabile entrante: la più negativa
- ▶ variabile uscente: fra tutte le righe  $t$  per cui  $\bar{b}_t/\bar{a}_{th} = \theta$  scegliere quella con il minimo  $B(t)$

## Regola di Bland

Scegliere la variabile entrante  $x_h$  e quella uscente  $x_{B(t)}$  preferendo, fra le opzioni possibili, quelle corrispondenti agli indici più piccoli:

- ▶  $h = \arg \min\{j : c_j < 0\}$
- ▶ fra tutte le righe  $t$  per cui  $\bar{b}_t / \bar{a}_{th} = \theta$  scegliere quella con il minimo  $B(t)$

### Teorema

Utilizzando la regola di Bland il metodo del simplesso converge dopo al più  $\binom{n}{m}$  iterazioni

## Dimostrazione

Per assurdo, supponiamo che esistano istanze di PL per cui si verifichi un ciclaggio, cioè la visita di una sequenza di basi  $B_1, B_2, \dots, B_k = B_1$

- ▶ fra queste istanze, ne consideriamo una minimale, cioè col minor numero di righe e colonne
- ▶ per questa, tutte le righe e le colonne del tableau sono state modificate durante la sequenza: se ce ne fosse una non modificata, la potremmo eliminare riducendo il problema
- ▶ quindi, tutte le colonne entrano ed escono a turno dalla base
- ▶ deve essere  $\bar{b}_i = 0, i = 1, \dots, m$ : altrimenti, nel pivot associato ad una riga  $i$  con  $\bar{b}_i > 0$  si avrebbe  $\theta > 0$  rompendo il ciclaggio

## Dimostrazione

Tableau  $T$  (in forma canonica risp.  $B$ ) in cui  $x_n = x_{B(t)}$  esce dalla base per far entrare una certa var.  $x_h$

$\dots$	$x_{B(i)}$	$\dots$	entra $x_h$	$\dots$	esce $x_n$	
	0		$< 0$		0	$-z$
	0		$\leq 0$		0	0
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	1		$\leq 0$		0	0
	0		$\leq 0$		0	0
	0		$> 0$		1	0
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
	0		$\leq 0$		0	0

$\bar{a}_{ih} \leq 0, i \neq t$ : se esistesse  $i \neq t$ , con  $\bar{a}_{ih} > 0$  la regola di Bland avrebbe scelto  $x_{B(i)}$  e non  $x_n$  come var. uscente

## Dimostrazione

Tableau  $\tilde{T}$  in cui  $x_n$  rientra in base

$\cdots$	$x_{B(i)}$	$\cdots$	$x_h$	$\cdots$	$x_n$	
$\geq 0$	$\geq 0$	$\geq 0$	$\geq 0$	$\geq 0$	$< 0$	

per ottenere  $\tilde{T}$  da  $T$  mediante una sequenza di pivot, devono esistere moltiplicatori  $\mu_1, \dots, \mu_m$  tali che:

$$[\text{riga 0 di } \tilde{T}] = [\text{riga 0 di } T] + \sum_{i=1}^m \mu_i [\text{riga } i \text{ di } T]$$

## Dimostrazione

Allora:

- ▶  $\tilde{c}_{B(t)} = \tilde{c}_n = \bar{c}_{B(t)} + \mu_t = \mu_t$ , quindi  $\tilde{c}_n < 0 \implies \mu_t < 0$
- ▶  $\tilde{c}_{B(i)} = \bar{c}_{B(i)} + \mu_i = \mu_i$  quindi  $\tilde{c}_{B(i)} \geq 0$  (regola di Bland)  
 $\implies \mu_i \geq 0, i \neq t$

torniamo a considerare la variabile  $h$  nel nuovo tableau. Deve essere  $\tilde{c}_h \geq 0$ , ma essendo:

$$\tilde{c}_h = \bar{c}_h + \sum_{i \neq t} \bar{a}_{ih} \mu_i + \bar{a}_{th} \mu_t$$

con  $\bar{c}_h < 0$

$\bar{a}_{ih} \leq 0, \mu_i \geq 0$

$\bar{a}_{th} > 0, \mu_t < 0$

risulta  $\tilde{c}_h < 0$  **contraddizione**



## Efficienza del metodo del simplex

- ▶ costo computazionale di un'iterazione
- ▶ numero di iterazioni

---

calcolo $\mathbf{B}^{-1}$ , soluzione $\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$	$O(m^3)$
prodotto $\mathbf{Bb}$	$O(m^2)$
prodotto $\mathbf{u}^T \mathbf{b}$	$O(m)$

---

implementazione matriciale	implementazione tableau
calcolo $\mathbf{B}^{-1}$	$O(m^3)$
calcolo $\bar{c}$	$O(nm)$
totale	$O(m^3 + nm)$

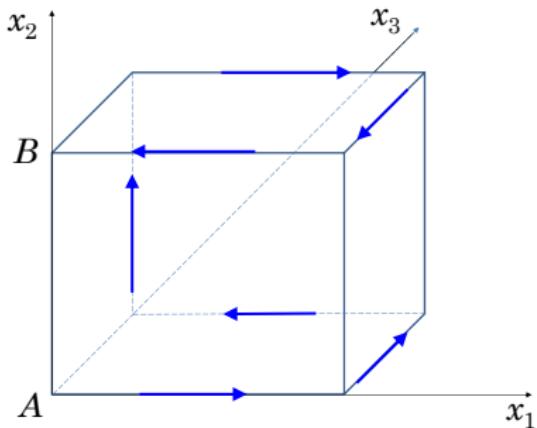
## Sul numero di iterazioni

consideriamo un problema nel cubo unitario:

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n$$

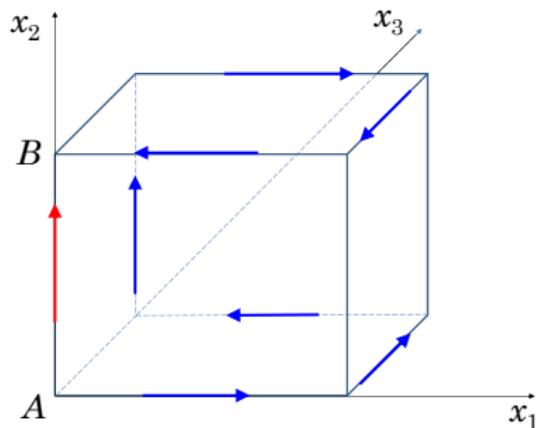
che ha  $2^n$  vertici.

Una regola di pivoting che corrisponde ad un cammino che tocca tutti i vertici risulta in un numero esponenziale di iterazioni



## Sul numero di iterazioni

tuttavia il primo vertice  $A$  e l'ultimo vertice  $B$  sono adiacenti: una diversa regola di pivoting **terminerebbe in una iterazione!!**



- ▶ per molte regole di pivoting "ragionevoli" esistono esempi per cui la regola risulta in un numero esponenziale di iterazioni
- ▶ questi NON escludono la possibilità che un'altra regola possa fare meglio

# Diametro di un poliedro

possiamo stimare il numero di iterazioni in modo indipendente dalla regola di pivoting?

## Definizione

Dati due vertici  $x, y$  definiamo **distanza** fra  $x$  e  $y$  il minimo numero  $d(x, y)$  di "salti" fra vertici adiacenti necessari per passare da  $x$  a  $y$

## Definizione

Definiamo **diametro**  $D(P)$  di un poliedro  $P$  la massima distanza  $d(x, y)$  fra tutte le coppie  $(x, y)$  di vertici di  $P$ .

Sia inoltre  $\Delta(n, m)$  il massimo  $D(P)$  se  $P$  è un politopo in  $\mathbb{R}^n$  definito da  $m$  disuguaglianze

## La congettura di Hirsch

- ▶ se il simplex inizia da un vertice  $x$  e l'unica soluzione ottima è  $y$ , allora servono almeno  $d(x, y)$  iterazioni
- ▶ quindi, se  $\Delta(n, m)$  cresce esponenzialmente con  $n$  ed  $m$ , allora il simplex richiederebbe un numero esponenziale di iterazioni indipendentemente dalla regola di pivoting
- ▶ quindi, è possibile sviluppare regole di pivoting "efficienti" solo se  $\Delta(n, m)$  cresce polinomialmente con  $n$  ed  $m$

**Congettura di Hirsch:**  $\Delta(n, m) \leq m - n$

- ▶ sebbene la congettura non sia dimostrata, l'esperienza pratica mostra che il simplex richiede tipicamente  $O(m)$  iterazioni