# Introduzione alla Ricerca Operativa

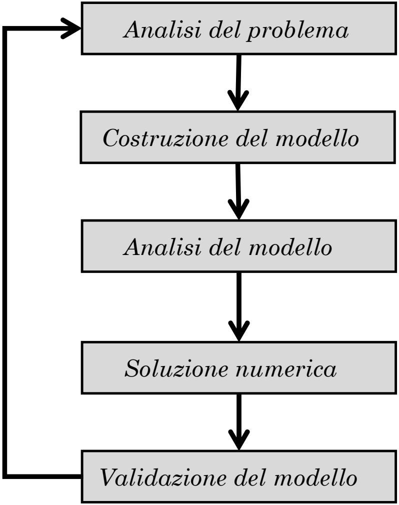
- Cos'è la Ricerca Operativa?
- Modellazione di problemi decisionali
- Fasi di uno studio di RO
- Applicazioni della RO

# Cos'è la Ricerca Operativa?

La Ricerca Operativa  la disciplina che concerne lutilizzo del metodo scientifico nei processi decisionali

- Analisi e modellazione dei sistemi, allo scopo di prevederne l'evoluzione e/o di individuare le scelte che li facciano evolvere verso gli obiettivi desiderati.
- Intrinsecamente interdisciplinare: Matematica Applicata /Informatica/ Ingegneria /Economia
- Gli strumenti della RO: modelli matematici, statistici e simulativi trattati attraverso tecniche analitiche e numeriche.

# Fasi di uno studio di RO



# Il problema del pasticciere - NEWTON, febbraio 2004

Un pasticciere produce 2 tipi di uova, EXTRA e SUPER utilizzando cacao, nocciole e latte

| | Cacao | Nocciole | Latte |
|---|---|---|---|
| EXTRA | 1 Kg/uovo | 1 Kg/uovo | 2 Kg/uovo |
| SUPER | 3 Kg/uovo | 1 Kg/uovo | 1 Kg/uovo |

Il pasticciere ha a disposizione:

- 36 Kg. di cacao
- 16 Kg. di nocciole
- 28 Kg. di latte

mentre dalla vendita ricava:

- 40 EUR/uovo EXTRA
- 60 EUR/uovo SUPER

Problema: massimizzare il ricavo totale dalla vendita

# Analisi del problema

- Analisi della struttura: problema singolo decisore (il pasticciere),
- Individuazione dei legami logici e funzionali: vincoli sulle risorse
- Individuazione degli obiettivi: massimizzare il ricavo (singolo criterio)

# Costruzione del modello

| | Cacao | Nocciole | Latte | |
|---|---|---|---|---|
| EXTRA | 1 Kg/uovo | 1 Kg/uovo | 2 Kg/uovo | 40 EUR/uovo |
| SUPER | 3 Kg/uovo | 1 Kg/uovo | 1 Kg/uovo | 40 EUR/uovo |
| | 36 Kg | 16 Kg | 28 Kg | |

1. scelta delle variabili decisionali: $x_E, x_S$ quantità di uova da preparare risp. di tipo EXTRA E SUPER
2. definizione della funzione obiettivo: max ricavo

$$\max 40x_E + 60x_S$$

3. descrizione delle scelte possibili (vincoli): disponibilità delle risorse

| | |
|---|---|
| cacao | $1x_E + 3x_S \leq 36$ |
| nocciole | $1x_E + 1x_S \leq 16$ |
| latte | $2x_E + 1x_S \leq 28$ |

# Ipotesi

- Proporzionalità. I consumi degli ingredienti e i ricavi sono proporzionali alle quantità di uova prodotte: ad es. per produrre $1$ uovo di tipo SUPER, servono $3$ Kg di cacao indipendentemente dalla quantità di uova.
- Additività. I consumi degli ingredienti e i ricavi sono additivi: per produrre $x_E$ uova di tipo EXTRA e $x_S$ uova di tipo SUPER, servono $x_E + 3x_S$ Kg di cacao
- Frazionarietà. Non abbiamo imposto che le variabili siano intere:  possibile che la soluzione del problema ci chieda di produrre quantità frazionarie di uova.

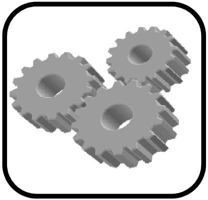
# Analisi del modello

$$\begin{aligned} \max 40x_E + 60x_S & \\ 1x_E + 3x_S &\leq 36 \\ 1x_E + 1x_S &\leq 16 \\ 2x_E + 1x_S &\leq 28 \\ x_E, x_S &\geq 0 \end{aligned}$$

- esistenza ed unicità delle soluzioni
- caratterizzazione analitica delle soluzioni ottime
- stabilità delle soluzioni rispetto a variazioni dei parametri del modello
- relazioni con altri problemi noti

# Soluzione numerica

$$\max\ 40\,x_1 + 60\,x_2$$
$$1\,x_1 + 3\,x_2 \leq 36$$
$$1\,x_1 + 1\,x_2 \leq 16$$
$$2\,x_1 + 1\,x_2 \leq 28$$
$$x_1,\, x_2 \geq 0$$



$$x_1^* = 6\ x_2^* = 10,\ f(x^*) = 840$$

**Soluzione**

# Validazione del modello

L'analisi delle soluzioni "sul campo" può evidenziare errori nel modello. Ad esempio, il pasticciere non ci aveva detto che per preparare le uova serve anche lo zucchero!

Integriamo l'input del problema:

| | zucchero |
|---|---|
| EXTRA | 15g/uovo |
| SUPER | 20g/uovo |
| | 500 g |

nuovo vincolo: $15x_E + 20x_S \leq 500$

# Contesti applicativi della RO

- Trasporti e Logistica
- Telecomunicazioni
- Sistemi di produzione
- Sistemi di servizio
- Finanza
- Medicina . . .

Diversi tipi di modelli di ottimizzazione si trovano nel sito:
www.scienceofbetter.org

Numerose applicazioni industriali in: www.neos-server.org

# Problema di Ottimizzazione

- $E$ insieme ambiente (insieme di soluzioni, decisioni o alternative) (Es. $E \in \mathbb{R}^n$)
- $X \subseteq E$ insieme delle soluzioni ammissibili o *regione ammissibile*
- $f : X \to \mathbb{R}$ *funzione obiettivo*

Problema di ottimizzazione (in forma di min):

$$\boxed{\text{Trovare un elemento } x^* \in X \text{ tale che } f(x^*) \leq f(x), \forall x \in X}$$

$x^*$ è detta *soluzione ottima*, $f(x^*)$ *valore ottimo*

# Problema dell'assegnamento

3 artigiani sono disponibili a realizzare tre lavori. Assegnare un lavoro ad un artigiano comporta un costo.
Riassumiamo tali costi in una tabella:

| | | lavori | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 |
| | 1 | 10 | 12 | 20 |
| artigiani | 2 | 7 | 15 | 18 |
| | 3 | 14 | 10 | 9 |

Problema:
Assegnare esattamente un lavoro ad ogni artigiano in modo da minimizzare i costi

# Modello matematico

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{lavoro } j \text{ assegnato all'artigiano } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\min 10x_{11}+12x_{12}+20x_{13}+7x_{21}+15x_{22}+18x_{23}+14x_{31}+10x_{32}+9x_{33}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$

ad ogni artigiano un lavoro

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$

ogni lavoro ad un artigiano