Claudio Arbib
Università di L'Aquila

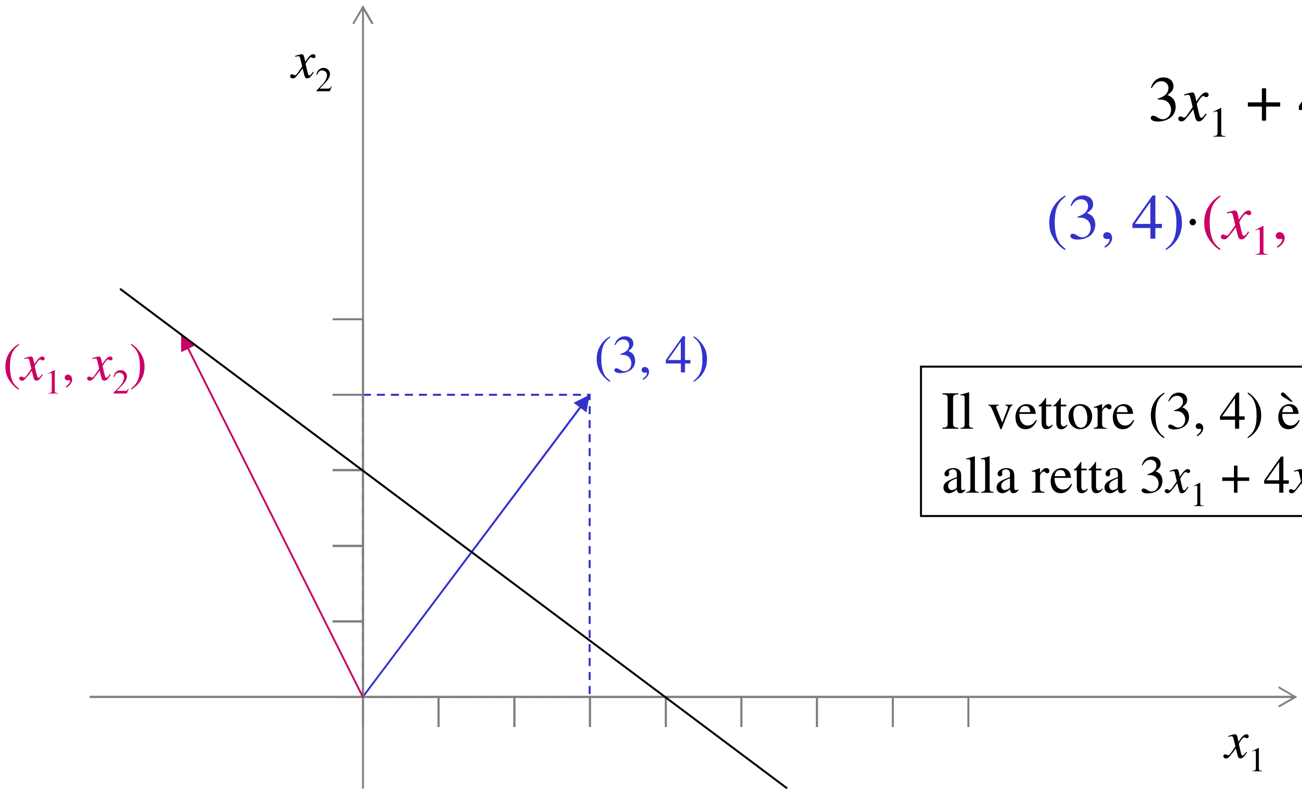
Ricerca Operativa

Programmazione Lineare: proprietà geometriche

Sommario

- Iperpiani in IR^n
- Programmazione lineare: intuizione geometrica
  - analisi di un sistema dinamico come problema di PL
  - geometria del problema duale
  - un problema più prosaico
  - direzione di miglioramento
- Direzioni di un poliedro
  - cono di recessione e sue proprietà
- Teorema di Weyl
- Teorema fondamentale della PL

Iperpiani in $\mathrm{I\!R}^n$



$$3x_1 + 4x_2 = 12$$

$$(3, 4)\cdot(x_1, x_2) = 12$$

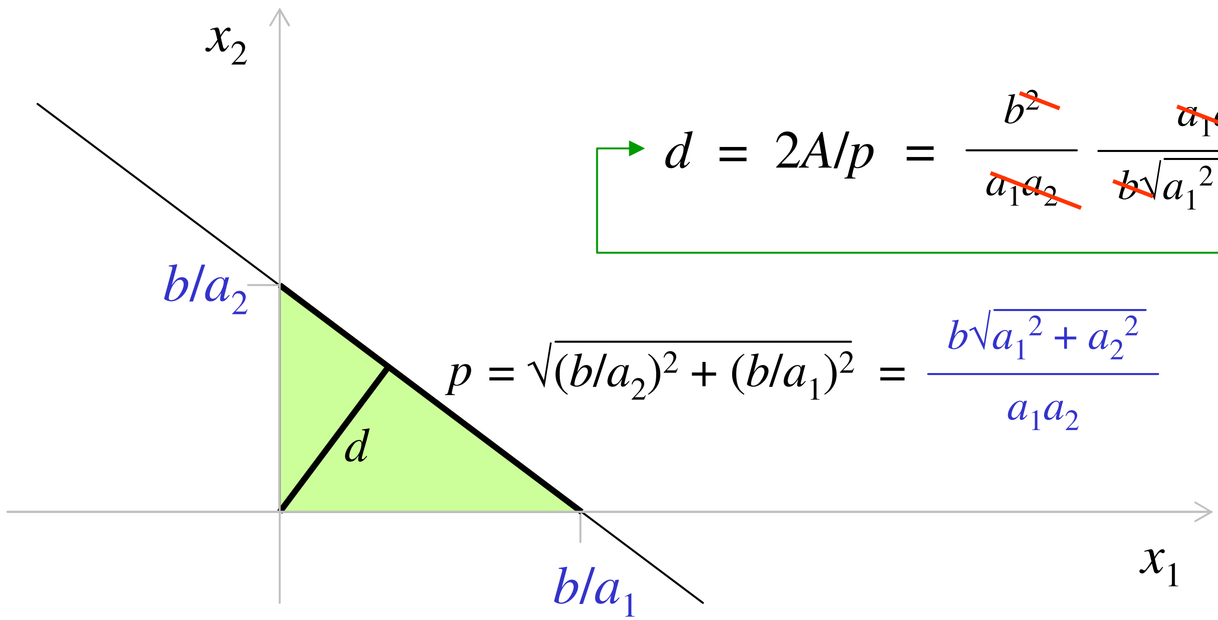
Il vettore (3, 4) è ortogonale alla retta $3x_1 + 4x_2 = 12$

Un esempio

Iperpiani in $\mathbb{R}^n$

$$a_1x_1 + a_2x_2 = d\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\boxed{(a_1, a_2)\cdot(x_1, x_2) = d|(a_1, a_2)|}$$



$$d = 2A/p = \frac{b^{\cancel{2}}}{\cancel{a_1a_2}}\,\frac{\cancel{a_1a_2}}{\cancel{b}\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{b}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

$$p = \sqrt{(b/a_2)^2 + (b/a_1)^2} = \frac{b\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_1a_2}$$

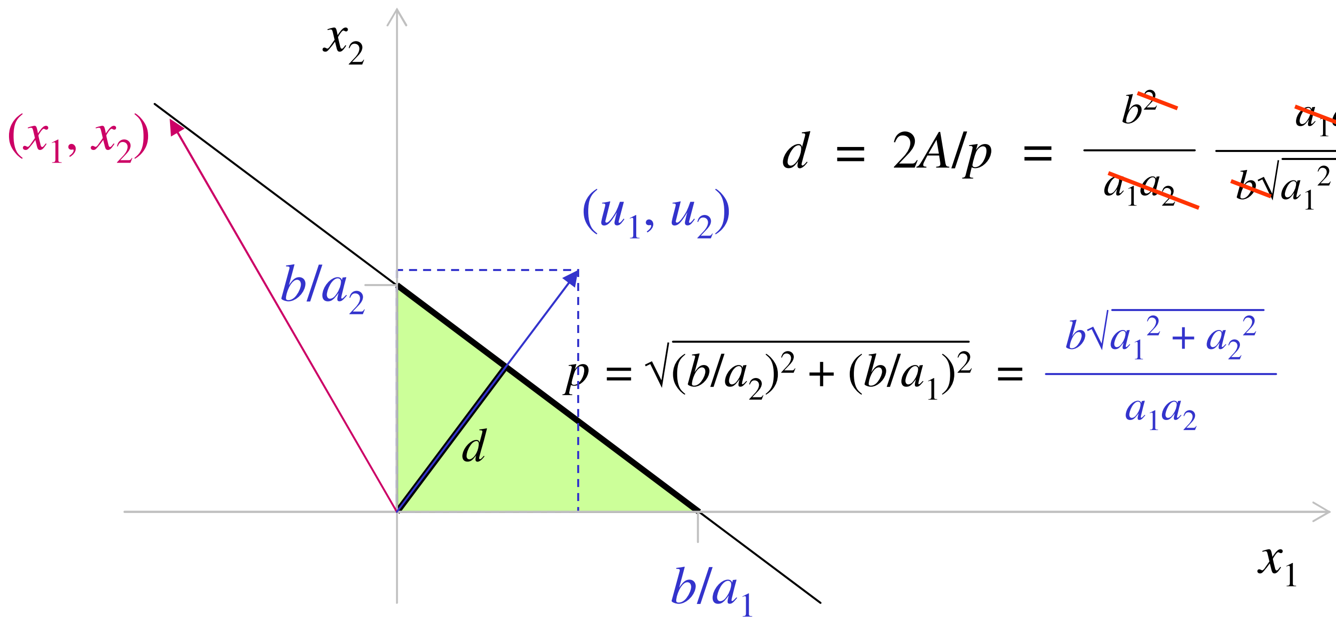
$$\boxed{\begin{aligned} 2A &= b^2/a_1a_2 \\ &= dp \end{aligned}}$$

In generale

Iperpiani in IR^n

$$a_1x_1 + a_2x_2 = d\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\boxed{(u_1, u_2)\cdot(x_1, x_2) = d}$$



$$d = 2A/p = \frac{b^{\cancel{2}}}{\cancel{a_1a_2}}\ \frac{\cancel{a_1a_2}}{\cancel{b}\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{b}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

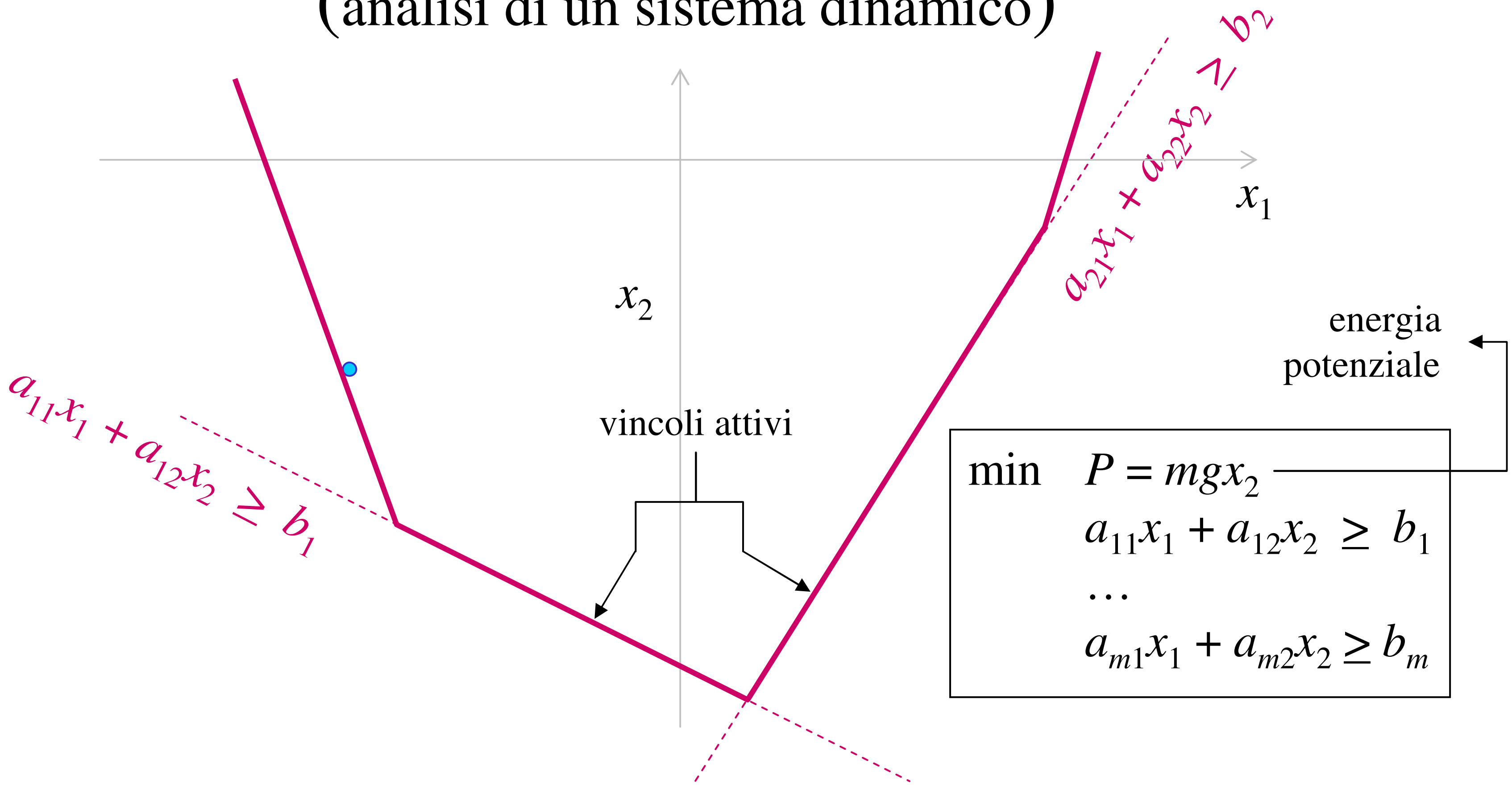
$$p = \sqrt{(b/a_2)^2 + (b/a_1)^2} = \frac{b\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_1a_2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 2A &= b^2/a_1a_2 \\ &= dp \end{aligned}}$$

L'iperpiano è quindi il luogo dei vettori $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ di IR^n la cui proiezione sulla direzione del versore $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ è pari a d (distanza dell'iperpiano dall'origine)

Galileiana

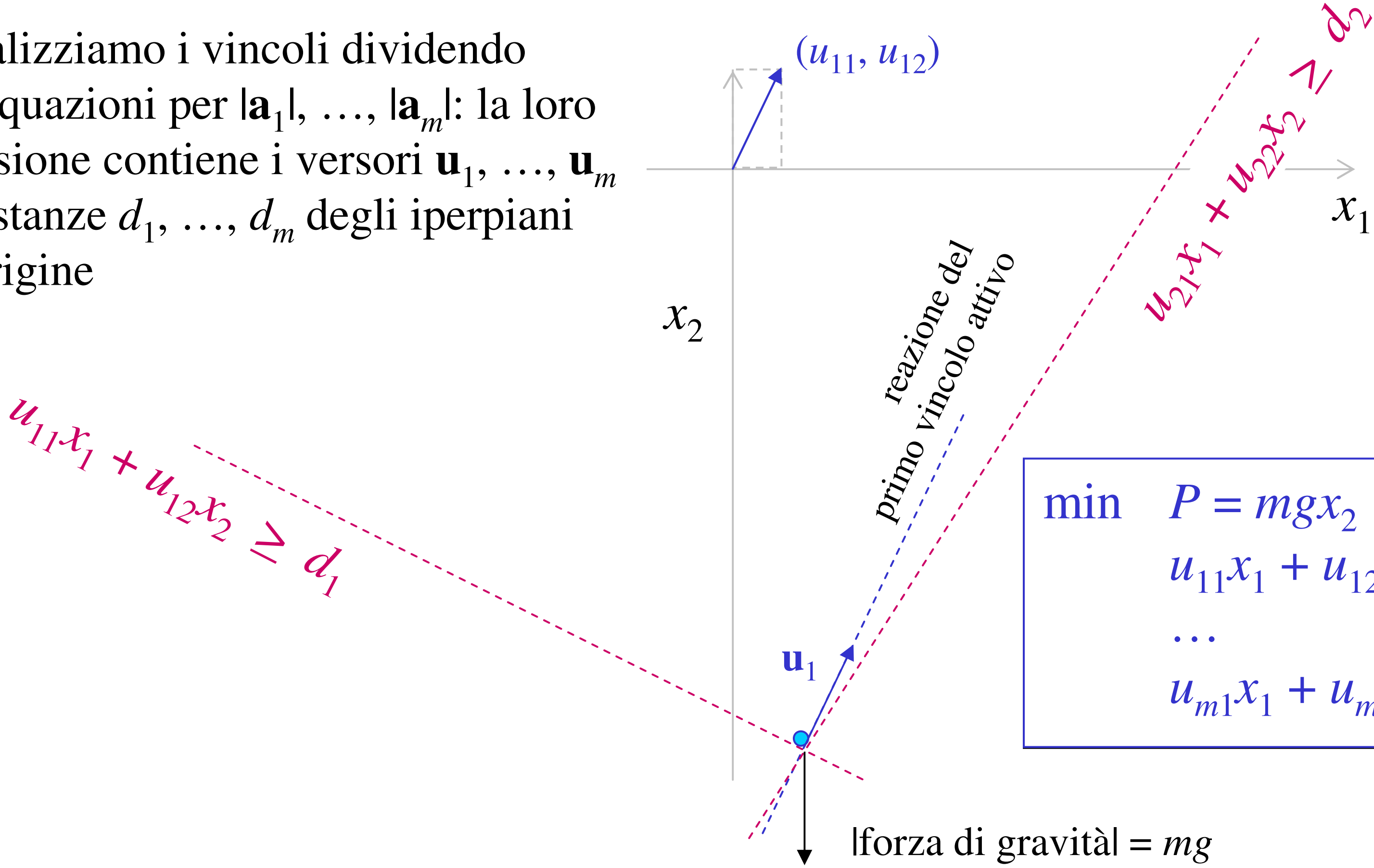
(analisi di un sistema dinamico)



- Dove va a finire una massa puntiforme soggetta a gravità in uno spazio delimitato da vincoli?

Galileiana

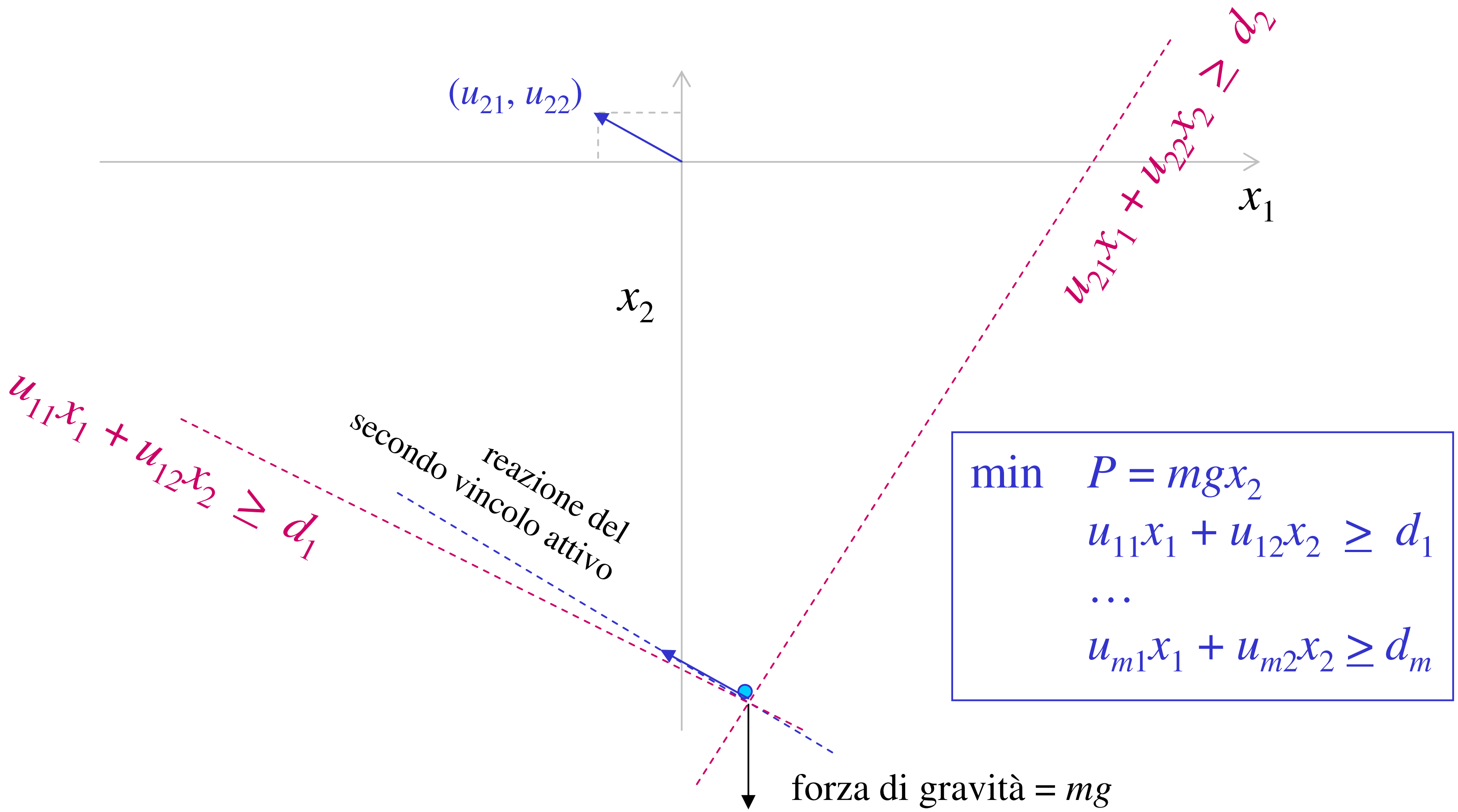
Normalizziamo i vincoli dividendo le disequazioni per $|\mathbf{a}_1|, \ldots, |\mathbf{a}_m|$: la loro espressione contiene i versori $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ e le distanze $d_1, \ldots, d_m$ degli iperpiani dall'origine



$$
\begin{aligned}
\min \quad & P = mgx_2 \\
& u_{11}x_1 + u_{12}x_2 \geq d_1 \\
& \ldots \\
& u_{m1}x_1 + u_{m2}x_2 \geq d_m
\end{aligned}
$$

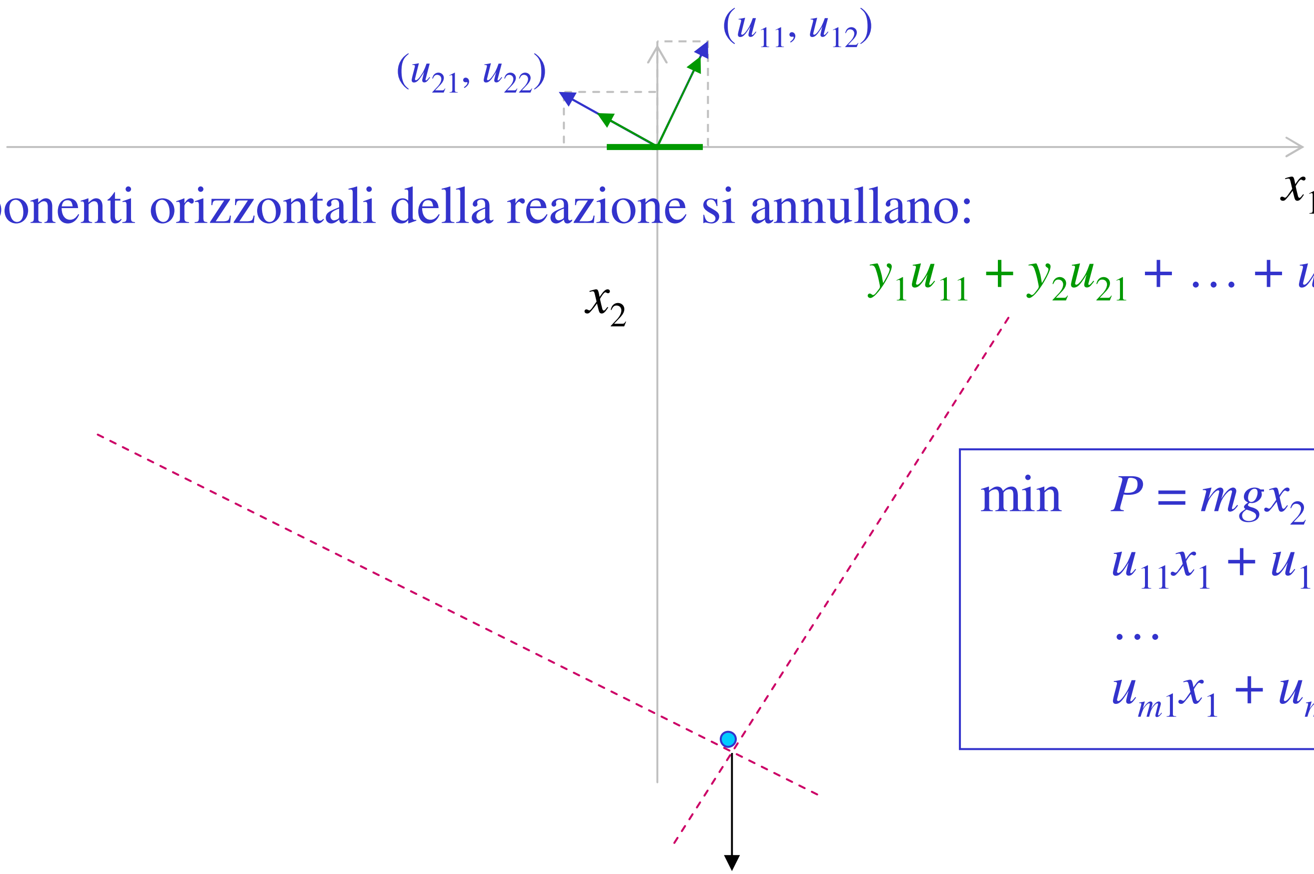
- Quale valore devono assumere le forze di reazione esercitate dai vincoli per opporsi alla forza di gravità?

Galileiana



- Quale valore devono assumere le forze di reazione esercitate dai vincoli per opporsi alla forza di gravità?

Galileiana



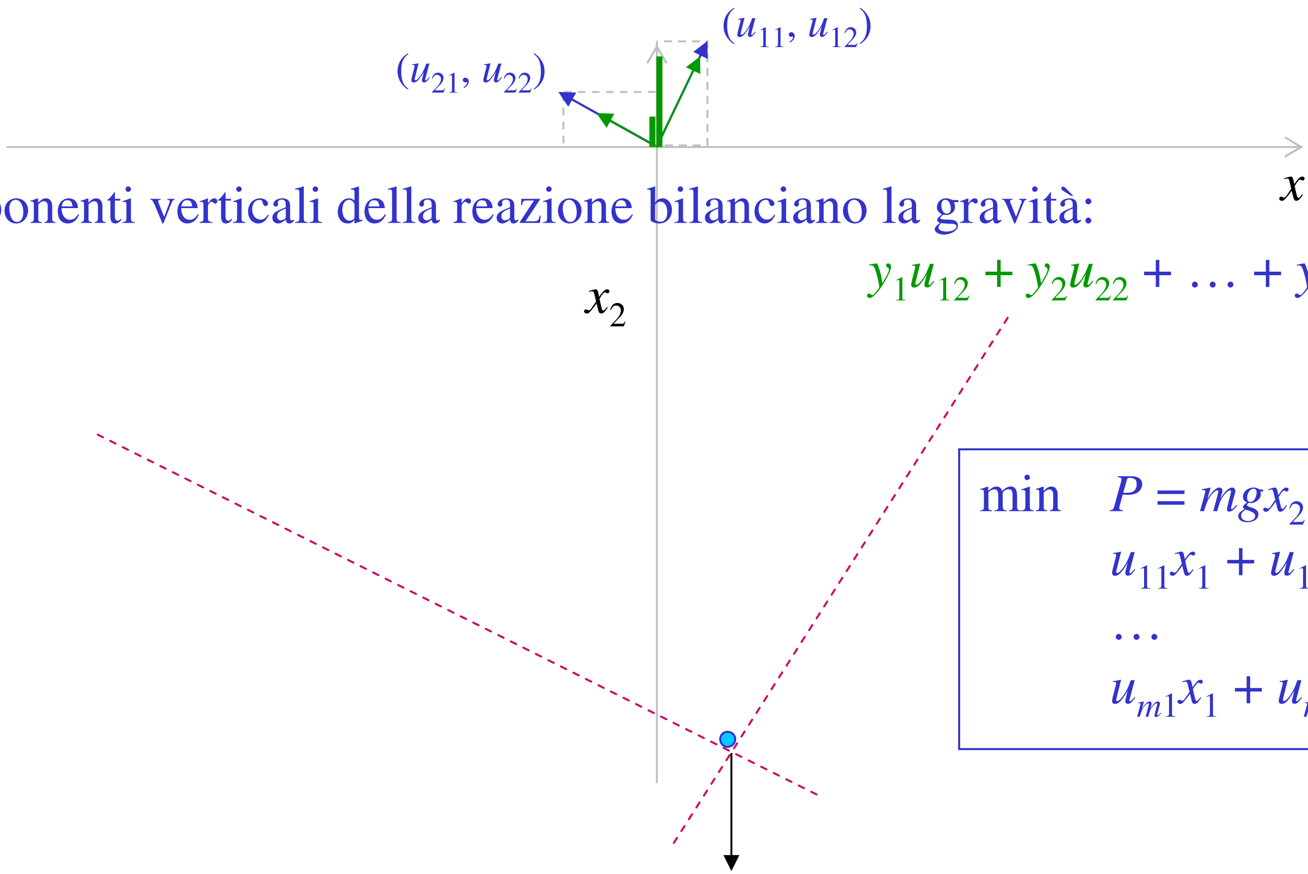
Le componenti orizzontali della reazione si annullano:

$$y_1 u_{11} + y_2 u_{21} + \ldots + u_{m1} y_m = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min & P = mgx_2 \\ & u_{11}x_1 + u_{12}x_2 \geq d_1 \\ & \ldots \\ & u_{m1}x_1 + u_{m2}x_2 \geq d_m \end{array}}$$

- y_i = intensità della forza di reazione del vincolo i
- $y_i = 0$ per $i = 3, \ldots, m$ (vincoli inattivi)

Galileiana



Le componenti verticali della reazione bilanciano la gravità:

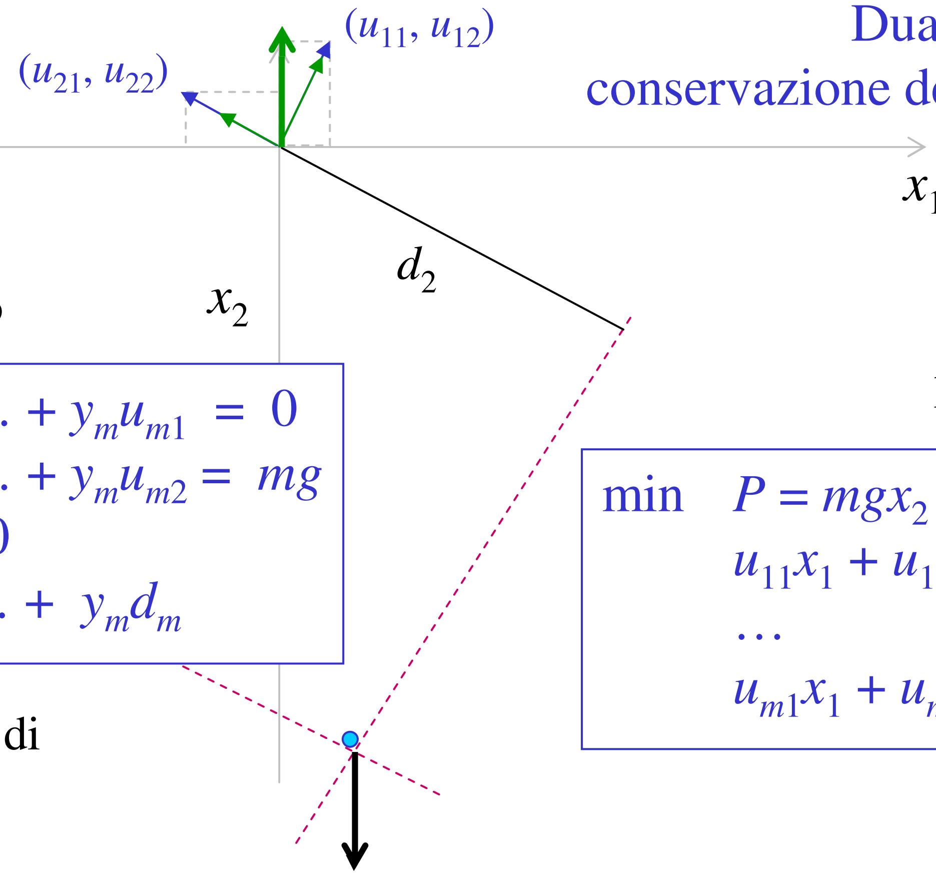
$$y_1 u_{12} + y_2 u_{22} + \ldots + y_m u_{m2} = mg$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min & P = mgx_2 \\ & u_{11}x_1 + u_{12}x_2 \geq d_1 \\ & \ldots \\ & u_{m1}x_1 + u_{m2}x_2 \geq d_m \end{array}}$$

- y_i = intensità della forza di reazione del vincolo i
- $y_i = 0$ per $i = 3, \ldots, m$ (vincoli inattivi)

Galileiana

Dualità forte e
conservazione dell’energia



equilibrio delle forze in gioco

$$
\begin{cases}
y_1 u_{11} + y_2 u_{21} + \ldots + y_m u_{m1} = 0 \\
y_1 u_{12} + y_2 u_{22} + \ldots + y_m u_{m2} = mg
\end{cases}
$$

$$y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_m \geq 0$$

$$\max \quad y_1 d_1 + y_2 d_2 + \ldots + y_m d_m$$

lavoro svolto dalle forze di
reazione vincolare

energia
potenziale

$$
\begin{aligned}
\min \quad & P = mgx_2 \\
& u_{11}x_1 + u_{12}x_2 \geq d_1 \\
& \ldots \\
& u_{m1}x_1 + u_{m2}x_2 \geq d_m
\end{aligned}
$$

- y_i = intensità della forza di reazione del vincolo i
- $y_i = 0$ per $i = 3, \ldots, m$ (vincoli inattivi)

Un problema più prosaico

Un pasticciere prepara due tipi di torte utilizzando un certo set di ingredienti.

In dispensa trova 1,5 kg di farina, 3 di zucchero, 1 di cacao, 20 uova e 100 g di vaniglia.

Torta	*Ingredienti per kg*				
	Farina (g)	*Zucchero (g)*	*Uova (n.)*	*Vaniglia (g)*	*Cacao (g)*
Millefoglie	300	100	2	20	0
Profiterol	250	250	5	0	200
Dispensa	1500	3000	20	100	1000

Poiché il prezzo al chilo di una millefoglie è 24€ e di un profiterol è 28€, si chiede quale quantità di ciascuna torta sia conveniente produrre per massimizzare il ricavo

Un problema più prosaico

Il consumo di farina conseguente alla produzione di x_1 kg di millefoglie e x_2 kg di profiterol, espresso in grammi, è dato da:

$$300x_1 + 250x_2$$

Torta	*Ingredienti per kg*				
	Farina (g)	*Zucchero (g)*	*Uova (n.)*	*Vaniglia (g)*	*Cacao (g)*
Millefoglie	300	100	2	20	0
Profiterol	250	250	5	0	200
Dispensa	1500	3000	20	100	1000

Tale consumo non dovrà superare la disponibilità di farina:

$$300x_1 + 250x_2 \leq 1500$$

Un problema più prosaico

Perché la produzione risulti fattibile occorre quindi avere:

$$\begin{array}{rcl} 300x_1 + 250x_2 & \leq & 1500 \\ 100x_1 + 250x_2 & \leq & 3000 \\ 2x_1 + \quad 5x_2 & \leq & 20 \\ 20x_1 \qquad\qquad & \leq & 100 \\ 200x_2 & \leq & 1000 \end{array}$$

con $x_1, x_2 \geq 0$.
L'obiettivo di massimizzare i ricavi si esprime infine:

$$\max \qquad 24x_1 + 28x_2$$

Un problema più prosaico

I vincoli del problema si possono riscrivere come segue:

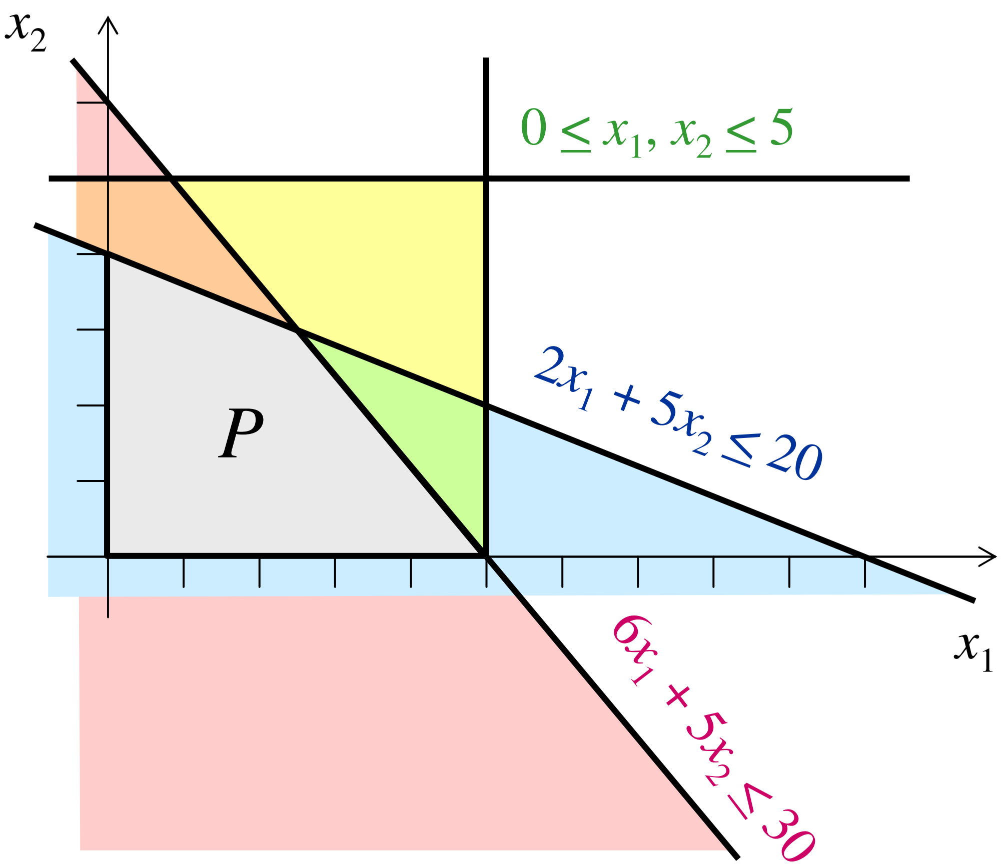
$$\begin{array}{rcrcr}
6x_1 & + & 5x_2 & \leq & 30 \\
\cancel{2x_1} & \cancel{+} & \cancel{5x_2} & \cancel{\leq} & \cancel{60} \\
2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 \\
x_1 & & & \leq & 5 \\
 & & x_2 & \leq & 5
\end{array}$$

con $x_1, x_2 \geq 0$.

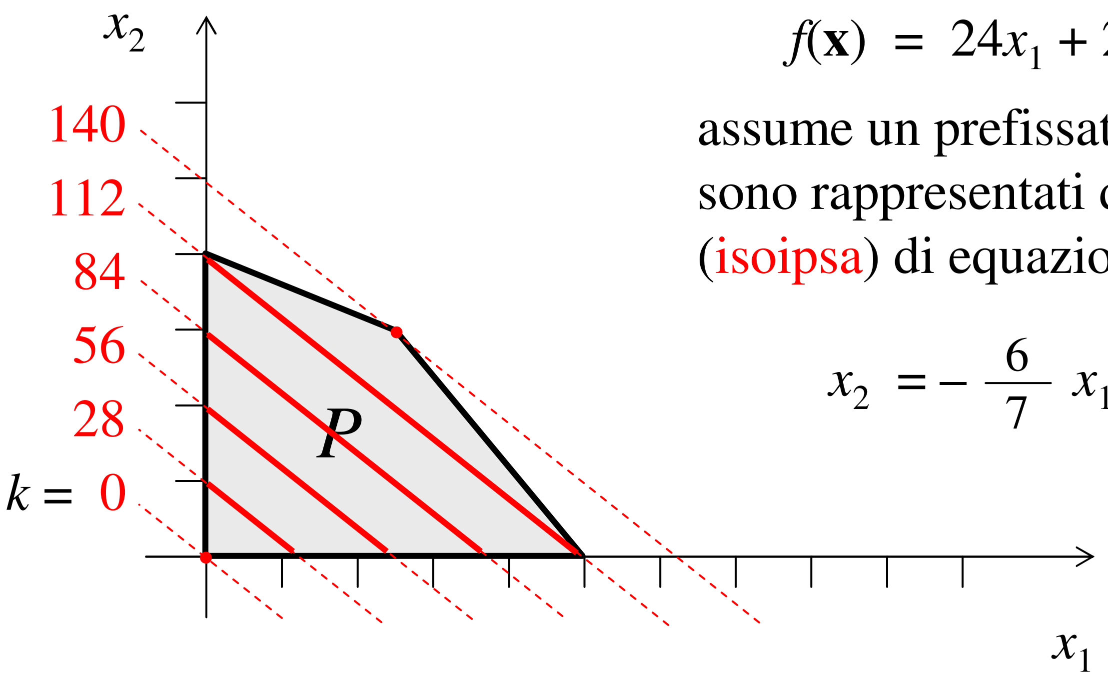
Osserviamo che il secondo vincolo è dominato dal terzo e può quindi essere eliminato.

Rappresentiamo il poliedro di questo problema di PL in IR^2.

Un problema più prosaico



Direzione di miglioramento



Il luogo dei punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali la funzione obiettivo

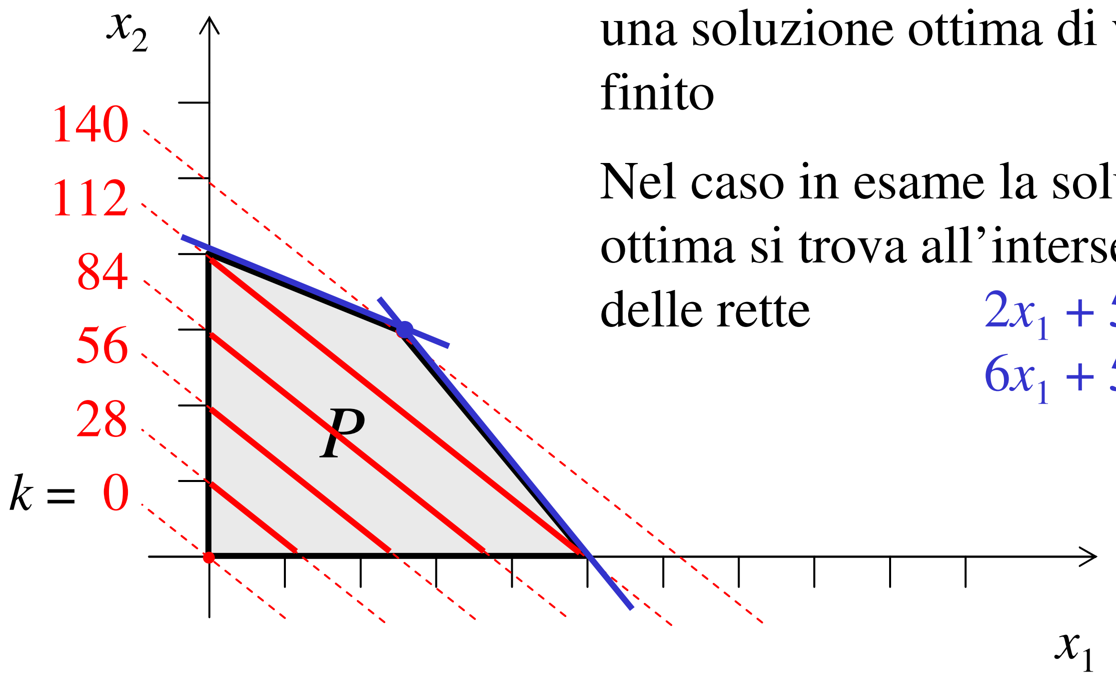
$$f(\mathbf{x}) = 24x_1 + 28x_2$$

assume un prefissato valore k sono rappresentati dalla retta (isoipsa) di equazione

$$x_2 = -\frac{6}{7}x_1 + \frac{k}{28}$$

L'intersezione della retta con P è luogo di punti soluzione aventi ugual valore k

Direzione di miglioramento



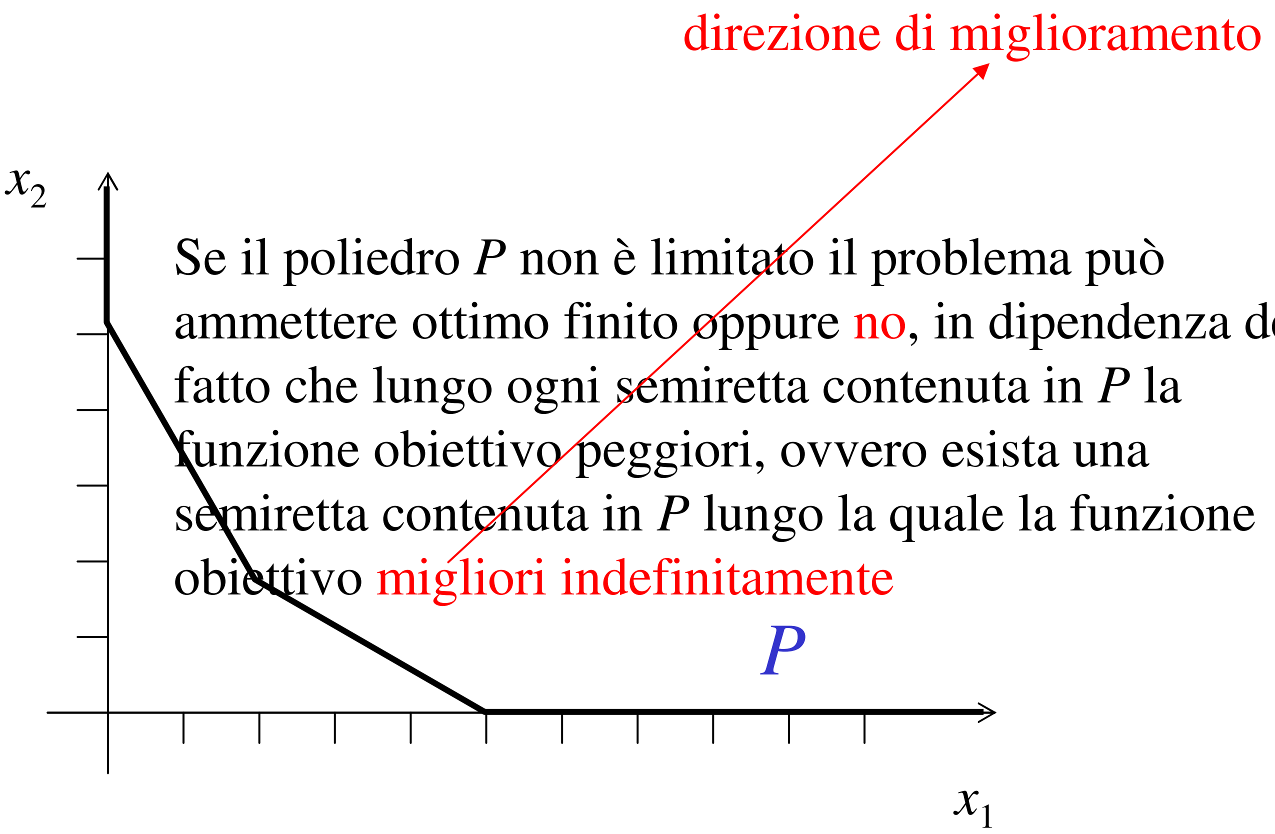
Poiché P è limitato e non vuoto il problema ammette certamente una soluzione ottima di valore finito

Nel caso in esame la soluzione ottima si trova all'intersezione delle rette

$$2x_1 + 5x_2 = 20$$
$$6x_1 + 5x_2 = 30$$

Essa corrisponde al punto $\mathbf{x}^*$ di coordinate 5/2, 3 e il suo valore è $f(\mathbf{x}^*) = 144$.

Direzione di miglioramento



Se il poliedro P non è limitato il problema può ammettere ottimo finito oppure no, in dipendenza del fatto che lungo ogni semiretta contenuta in P la funzione obiettivo peggiori, ovvero esista una semiretta contenuta in P lungo la quale la funzione obiettivo migliori indefinitamente

Per precisare questo concetto introduciamo la nozione di direzione di un poliedro P

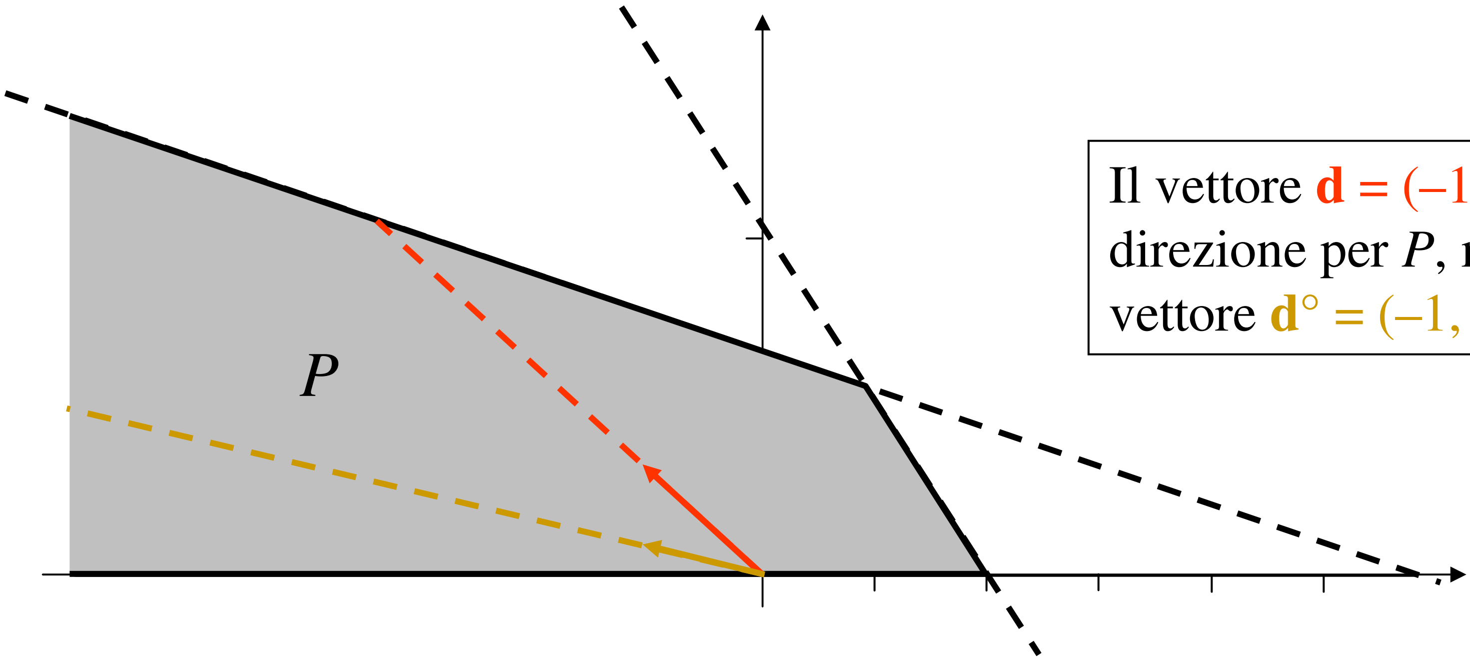
Direzioni di un poliedro

Sia P = P($\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$) $\subseteq$ IR^n un poliedro.

Definizione: Un vettore $\mathbf{d} \in$ IR^n si dice direzione di P se per ogni $\mathbf{x} \in P$ per ogni $\lambda \in$ IR si ha

$$\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} \quad \in \quad P$$

Esempio 1: Sia P definito dalle disequazioni $3x_1 + 2x_2 \leq 6$ $\quad x_1 + 3x_2 \leq 6$ $\quad x_2 \geq 0$

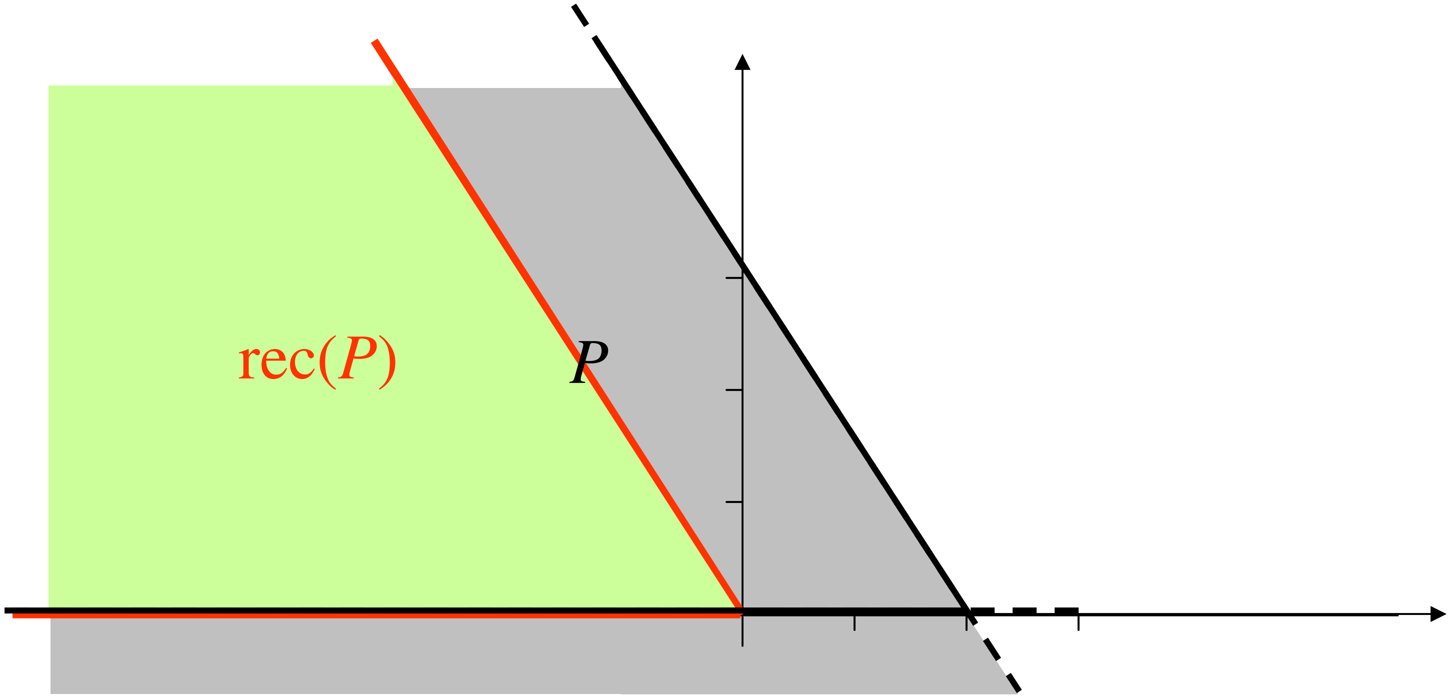


Il vettore $\mathbf{d}$ = (–1, 1) non è una direzione per P, mentre lo è il vettore $\mathbf{d}°$ = (–1, ¼)

Direzioni di un poliedro

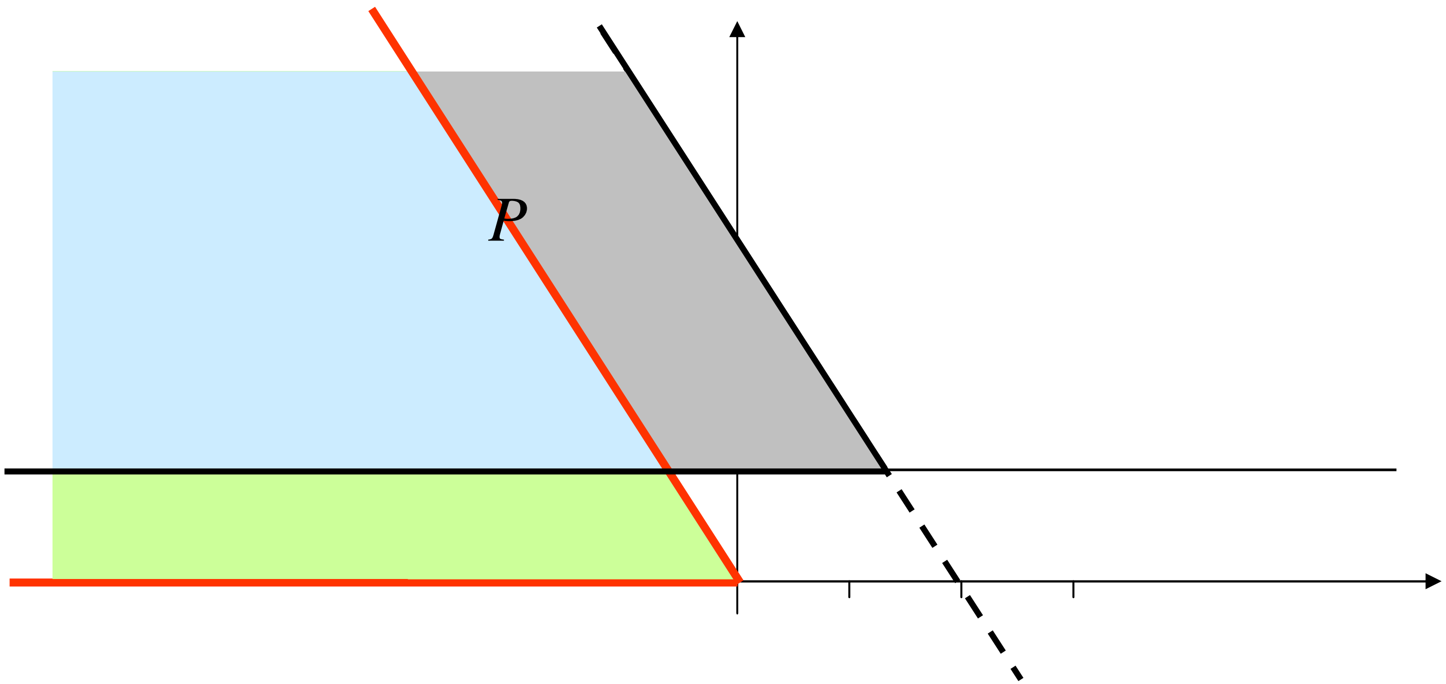
Definizione: L'insieme di tutti i vettori di che sono direzioni di *P* si dice cono di recessione di *P*, e si indica con rec(*P*).

Esempio 2: Sia *P* definito dalle disequazioni $3x_1 + 2x_2 \leq 6 \qquad x_2 \geq 0$



Direzioni di un poliedro

Esempio 3: Sia P definito dalle disequazioni $3x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad x_2 \geq 1$

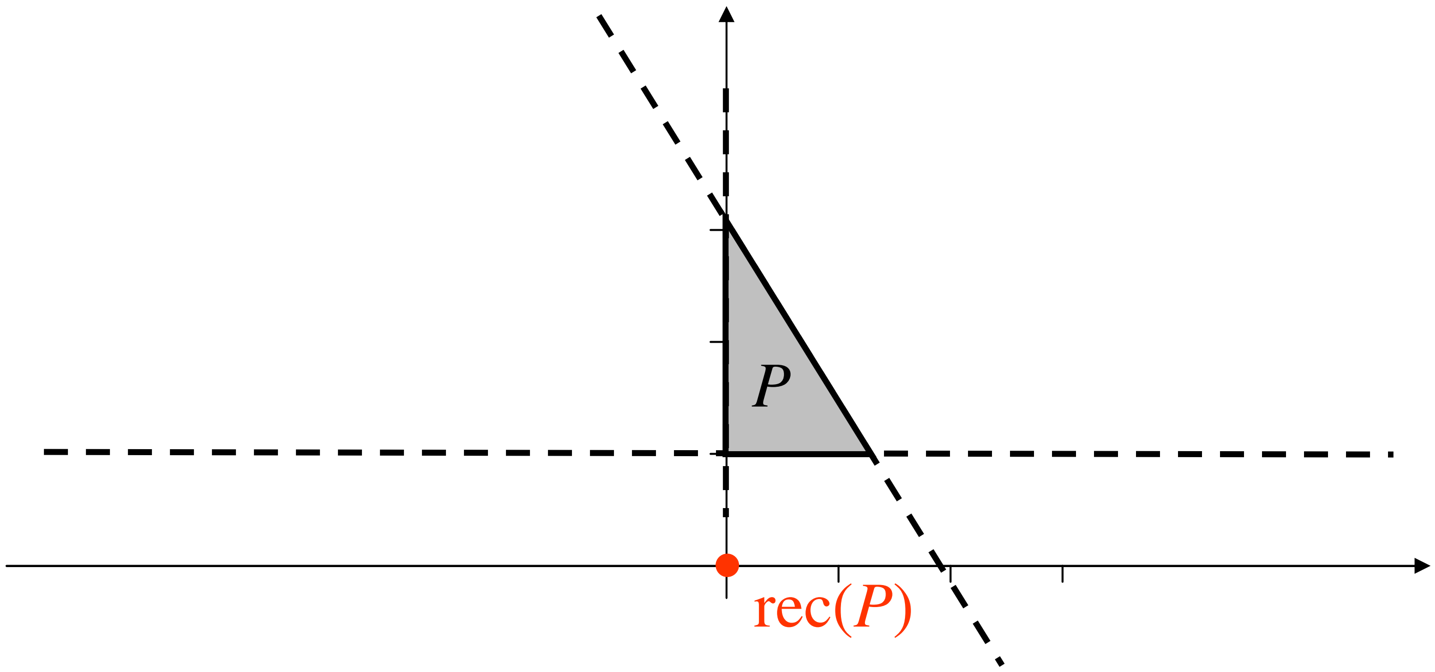


Nota: rec(P) è inalterato e non è contenuto in P

Direzioni di un poliedro

Esempio 4: Sia P definito dalle disequazioni $3x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad x_2 \geq 1$

$x_1 \geq 0$



Nota: rec(P) si riduce all'insieme $\{\mathbf{0}\}$

Proprietà del cono di recessione

Teorema 1

$\forall$ poliedro P, rec(P) $\neq \emptyset$

Dimostrazione:

Per ogni $\lambda > 0$ e $\mathbf{x} \in P$ si ha $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{0} = \mathbf{x} \in P$. Dunque $\mathbf{0} \in$ rec(P).

Teorema 2

Sia $P = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n \text{: } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$. Allora

$$\mathrm{rec}(P) \;=\; \{\mathbf{z} \in \mathrm{IR}^n \text{: } \mathbf{Az} \leq \mathbf{0}\}$$

Dimostrazione:

Se per $\mathbf{z}$ si ha $\mathbf{Az} \leq \mathbf{0}$, allora $\mathbf{z}$ è una direzione per P:

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{Az} \leq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{Ax} + \lambda\mathbf{Az} \;=\; \mathbf{A}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{z}) \;\leq\; \mathbf{b} \quad \forall \lambda > 0$$

Viceversa, se $\mathbf{z}$ è una direzione per P, allora $\mathbf{Az} \leq \mathbf{0}$:

(abs.) sia $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{z}) \leq \mathbf{b}$ $\forall \lambda > 0$, ma $\exists i$ per il quale $(\mathbf{Az})_i > 0$
allora scegliendo $\lambda > [b_i - (\mathbf{Ax})_i]/(\mathbf{Az})_i$ si esce da P

Teorema di Weyl

Notazione: Indichiamo con Ext(P) l'insieme dei punti estremi (vertici) del poliedro P.

Teorema 2 (Weyl, 1936)

Ogni punto $\mathbf{x}$ di un poliedro P = P($\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$) con Ext(P) $\neq \emptyset$ può esprimersi come somma di un punto $\mathbf{u} \in$ conv(Ext(P)) e di una direzione $\mathbf{d} \in$ rec(P):

$$P = \mathrm{conv}(\mathrm{Ext}(P)) + \mathrm{rec}(P)$$

Esercizio:

$P = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^3: -x_1 + 2x_2 \geq 2,\ x_1 - x_2 \geq -2,\ 5x_1 + 3x_2 \geq 15\}$

$\mathrm{Ext}(P) = \{(24/13, 25/13), (9/8, 25/8)\}$

$\mathrm{rec}(P) = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^3: -x_1 + 2x_2 \geq 0,\ x_1 - x_2 \geq 0,\ 5x_1 + 3x_2 \geq 0\}$

- verificare che $(3, 3) \in P$
- trovare $\mathbf{u} \in \mathrm{conv}(\mathrm{Ext}(P))$, $\mathbf{d} \in \mathrm{rec}(P)$ tali che $(3, 3) = \mathbf{u} + \mathbf{d}$

Teorema di Weyl

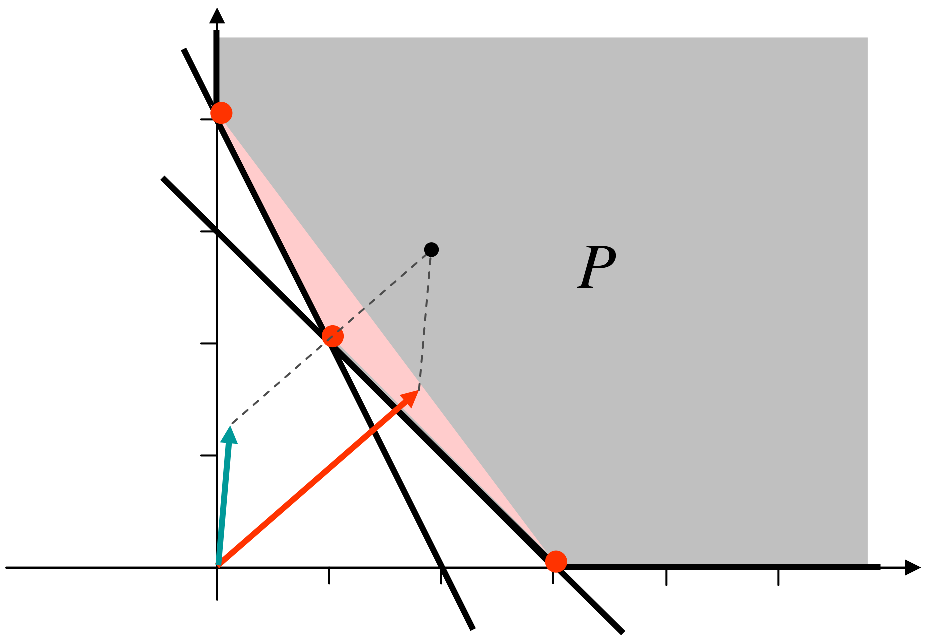
Esempio 5: Sia P definito dalle disequazioni $\quad 2x_1 + x_2 \geq 4 \quad x_1 + x_2 \geq 3$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$\mathrm{Ext}(P) = \{(0, 4), (1, 2), (3, 0)\}$

$\mathrm{conv}(\mathrm{Ext}(P))$

$\mathrm{rec}(P) = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^2 : x_1, x_2 \geq 0\}$



Teorema fondamentale della PL

Consideriamo il problema in forma generale

P: $\quad \max \; \mathbf{cx}$

$\quad\quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$

Teorema 3

Sia $P = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n: \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$, e sia $\mathbf{x}° \in P$. Allora

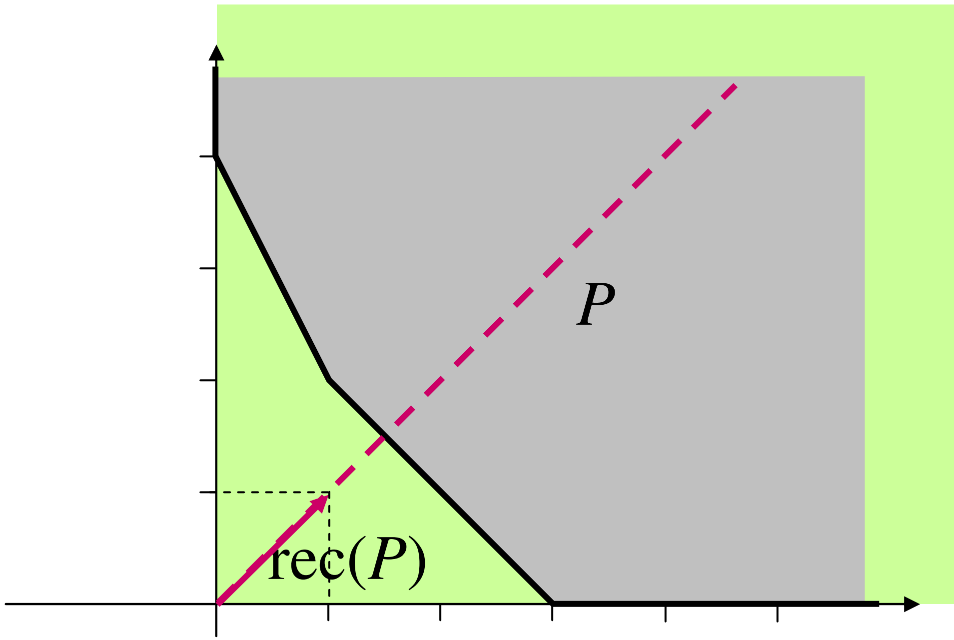
1) $\exists \mathbf{d} \in \mathrm{rec}(P)$: $\mathbf{cd} > 0 \quad \Rightarrow$ P illimitato

2) $\forall \mathbf{d} \in \mathrm{rec}(P)$, $\mathbf{cd} \leq 0 \quad \Rightarrow$ se $\mathrm{Ext}(P) \neq \emptyset$, P ammette una soluzione ottima $\mathbf{x}^* \in \mathrm{Ext}(P)$.

Teorema fondamentale della PL

Esempio 6: Consideriamo il problema P) max $3x_1 + 2x_2$

$$2x_1 + x_2 \geq 4$$
$$x_1 + x_2 \geq 3$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$



cioè max $3x_1 + 2x_2$

$$-2x_1 - x_2 \leq -4$$
$$-x_1 - x_2 \leq -3$$
$$-x_1 \leq 0,\ -x_2 \leq 0$$

Per **d** = (1, 1) si ha
cd = 3·1 + 2·1 = 5 > 0

Quindi P è illimitato superiormente

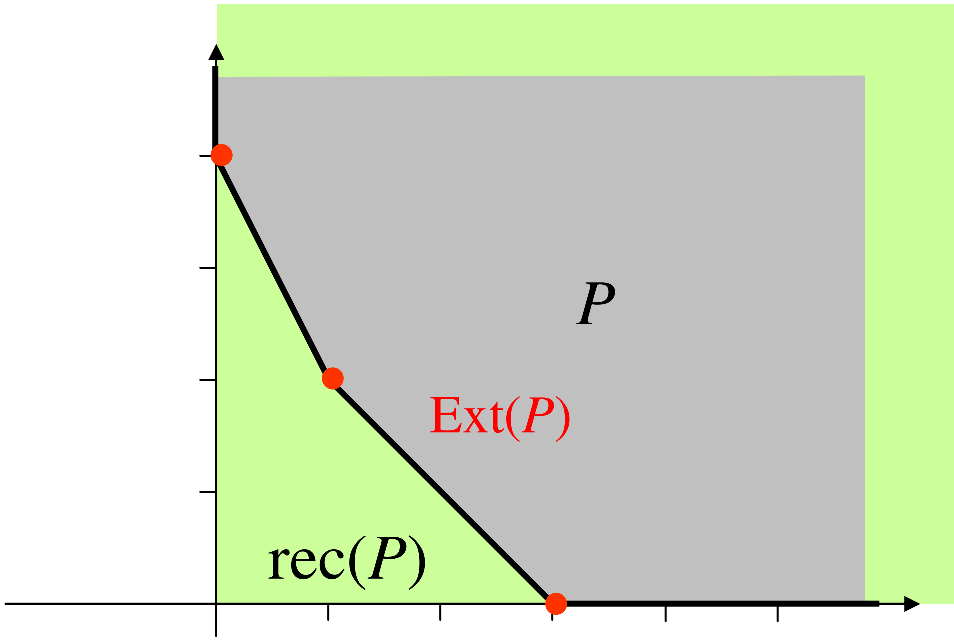
Teorema fondamentale della PL

Esempio 7: Consideriamo il problema P) min $4x_1 + x_2$

$$2x_1 + x_2 \geq 4$$
$$x_1 + x_2 \geq 3$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

cioè max $-4x_1 - x_2$

$$-2x_1 - x_2 \leq -4$$
$$-x_1 - x_2 \leq -3$$
$$-x_1 \leq 0,\ -x_2 \leq 0$$



Per ogni $\mathbf{d} \in \mathrm{rec}(P)$
si ha ora $\mathbf{cd} \leq 0$

Quindi uno dei punti rossi rappresenta una soluzione ottima

Teorema fondamentale della PL

Dimostrazione:

1) $\exists \mathbf{d} \in \mathrm{rec}(P)$: $\mathbf{cd} > 0 \Rightarrow$ P illimitato

Per definizione di direzione, $\mathbf{x}^\circ \in P$, $\mathbf{d} \in \mathrm{rec}(P) \Rightarrow \mathbf{x}^\circ + \lambda\mathbf{d} \in P$ per ogni $\lambda > 0$.

Sia per assurdo $\mathbf{x}^*$ ottima per P.

Quindi $\mathbf{cx}^* \geq \mathbf{c}(\mathbf{x}^\circ + \lambda\mathbf{d})$.

Ma poiché $\mathbf{cd} > 0$, ciò non è evidentemente vero per qualsiasi $\lambda > 0$: ad esempio, per $\lambda > (\mathbf{cx}^* - \mathbf{cx}^\circ)/\mathbf{cd}$

Dunque P è illimitato.

Teorema fondamentale della PL

2) $\forall \mathbf{d} \in \text{rec}(P)$, $\mathbf{cd} \leq 0 \quad \Rightarrow$ P ammette una soluzione ottima $\mathbf{x}^* \in \text{Ext}(P)$

Sia $E = \text{Ext}(P) = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ e sia k tale che $\mathbf{cv}_k \geq \mathbf{cv}_i$ $i = 1, \ldots, p$.

Per il Teorema di Weyl, ogni $\mathbf{x} \in P$ si può scrivere $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{d}$, con $\mathbf{u} \in \text{conv}(E)$ e $\mathbf{d} \in \text{rec}(P)$. Si ha evidentemente

$$\mathbf{cx} = \mathbf{cu} + \mathbf{cd} \leq \mathbf{cu} \qquad \text{(infatti per ipotesi } \mathbf{cd} \leq 0\text{)}$$

Inoltre

$$\mathbf{cu} = \mathbf{c}(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_p \mathbf{v}_p)$$

con $\lambda_1 + \ldots + \lambda_p = 1$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \geq 0$ (infatti $\mathbf{u} \in \text{conv}(E)$)

Quindi

$$\mathbf{cx} \leq \text{c}(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_p \mathbf{v}_p) = \lambda_1 \mathbf{cv}_1 + \ldots + \lambda_p \mathbf{cv}_p \leq$$
$$\leq (\lambda_1 + \ldots + \lambda_p)\mathbf{cv}_k = \mathbf{cv}_k$$

Se ne deduce che $\mathbf{v}_k \in \text{Ext}(P)$ è una soluzione ottima per P.