Sistemi compatibili

(Il metodo di Fourier-Motzkin)

Claudio Arbib

Università degli Studi di L'Aquila

OTTIMIZZAZIONE INDUSTRIALE & LOGISTICA

Sommario

1. Sistemi di disequazioni lineari e poliedri
2. Poliedri e insiemi convessi
3. Disequazioni implicate
4. Sistemi compatibili
5. Proiezione di un poliedro
    - Definizione
    - Esempi
6. Teorema di Fourier
7. Algoritmo di Fourier-Motzkin
8. Applicazioni
9. Esempio

1. Sistemi di disequazioni e poliedri

Definizione:

Siano $\mathbf{a} \in \mathrm{IR}^n$, $b \in \mathrm{IR}$. L'insieme

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n\text{: } \mathbf{ax} = b\} \subseteq \mathrm{IR}^n$$

si dice iperpiano. L'insieme

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n\text{: } \mathbf{ax} \leq b\} \subseteq \mathrm{IR}^n$$

si dice semispazio chiuso.

Definizione:

L'intersezione di un numero finito m di semispazi chiusi di IR^n definisce un poliedro di IR^n.

Quindi $\forall\ \mathbf{A} \in \mathrm{IR}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathrm{IR}^m$ l'insieme

$$P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n\text{: } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\} \subseteq \mathrm{IR}^n$$

definisce un poliedro. In particolare, $\varnothing$, H, S, IR^n sono poliedri.

2. Poliedri e insiemi convessi

Definizione:

Osserviamo che non tutti i poliedri di IR^n si possono rappresentare algebricamente con un sistema di disequazioni lineari. Ad esempio questa stella:

Definizione:

$S \subseteq$ IR^n è convesso se, comunque si prendano $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in S$, il punto $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y} + (1 - \alpha)\mathbf{z} \in S$ per ogni scelta di α in $[0, 1]$.

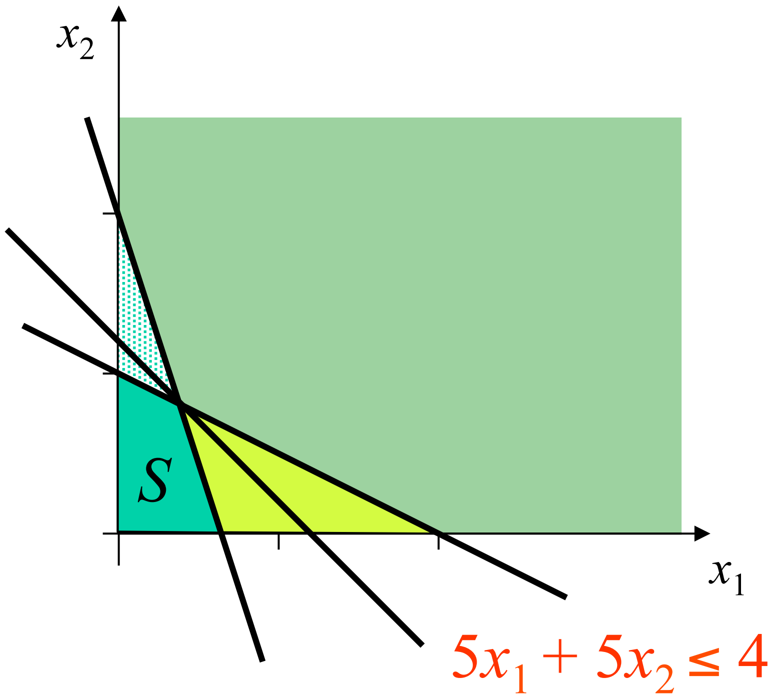
Teorema: $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ è un poliedro convesso.

Dimostrazione: Siano $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, cioè $\mathbf{Ay} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{Az} \leq \mathbf{b}$. Posto $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y} + (1 - \alpha)\mathbf{z}$, si ha $\mathbf{Ax} = \mathbf{A}[\alpha\mathbf{y} + (1 - \alpha)\mathbf{z}] = \alpha\mathbf{Ay} + (1 - \alpha)\mathbf{Az}$. Per ogni α scelto in $[0, 1]$, tanto α quanto $1 - \alpha$ risultano ≥ 0: quindi servendosi dell'ipotesi su $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ si può scrivere $\alpha\mathbf{Ay} + (1 - \alpha)\mathbf{Az} \leq \alpha\mathbf{b} + (1 - \alpha)\mathbf{b} = \mathbf{b}$. Perciò $\mathbf{x} \in P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

3. Disequazioni implicate

Definizione:

$\boldsymbol{\beta}\mathbf{x} \leq \gamma$ è una disequazione implicata dal sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ se ogni $\mathbf{x}$ che soddisfa $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ soddisfa anche $\boldsymbol{\beta}\mathbf{x} \leq \gamma$



$$
\begin{aligned}
x_1 \quad\quad\quad & \geq 0 \\
x_2 & \geq 0 \\
x_1 + 2x_2 & \leq 1 \\
3x_1 + x_2 & \leq 2
\end{aligned}
$$

3. Disequazioni implicate

Definizione:

Sia P un sistema di disequazioni in $\mathbb{R}^n$ e P l'insieme delle sue soluzioni. Allora P è minimale se la rimozione di una sua qualsiasi disequazione restituisce un sistema il cui insieme di soluzioni contiene propriamente P.

Definizione:

$\boldsymbol{\beta}\mathbf{x} \leq \gamma$ è combinazione conica delle disequazioni $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \equiv \{\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq b_i\,,\ i = 1, \ldots, m\}$ se e solo se

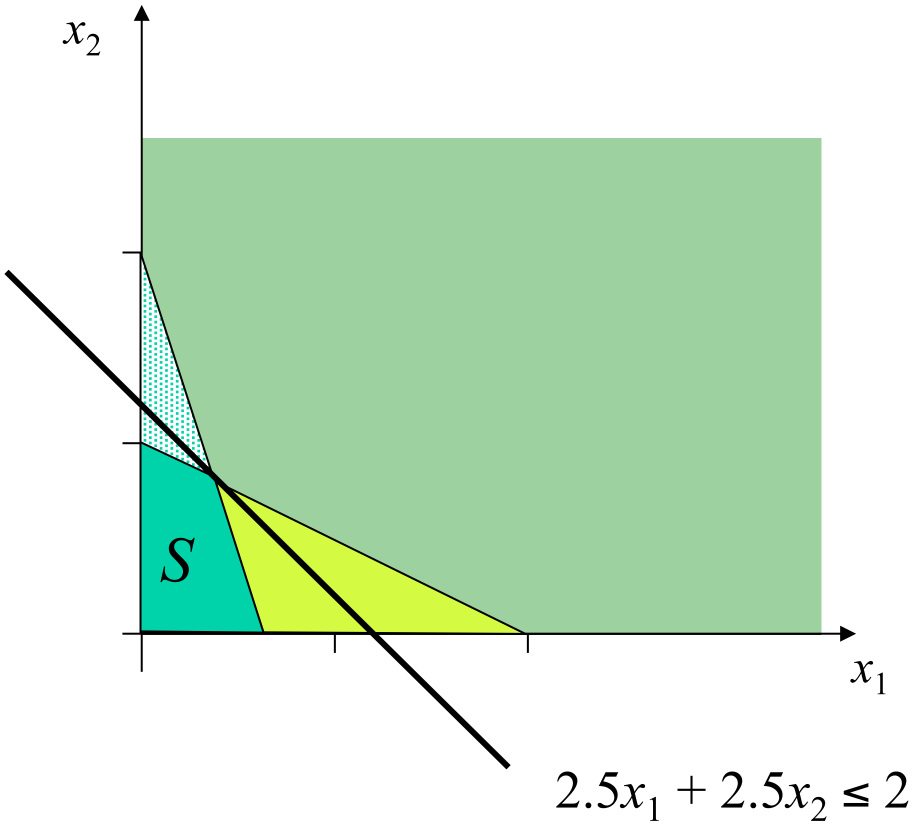
$$(\boldsymbol{\beta}, \gamma) = \sum \lambda_i(\mathbf{a}_i, b_i) \qquad \lambda_i \geq 0$$

Proposizione:

Ogni disequazione ottenuta come combinazione conica di $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ è una disequazione implicata.

3. Disequazioni implicate

Esempio:



$$
\begin{array}{rlllr}
0 & (-1, & 0, & 0) & + \\
0 & (0, & -1, & 0) & + \\
1 & (1, & 2, & 1) & + \\
0.5 & (3, & 1, & 2) & = \\
\hline
 & (2.5, & 2.5, & 1.5) &
\end{array}
$$

$$\lambda = (0, 0, 1, 0.5)$$

4. Sistemi compatibili

Definizione:

Un sistema di disequazioni lineari (= poliedro convesso) si dice compatibile (incompatibile) se (non) ammette soluzione.

Problema:

Stabilire se un dato poliedro $P = P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ è o no compatibile

Principio:

Ciò che esiste, fa ombra

(Corollario: i vampiri non esistono)

5. Proiezione di un poliedro

Definizione: Sia $P \subseteq \mathrm{IR}^n$ un poliedro.

Un insieme $P' \subseteq \mathrm{IR}^{n-1}$ si dice proiezione di P nel sottospazio delle variabili $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ se

1) $\forall \mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_{k-1}, w_{k+1}, \ldots, w_n) \in P'$
$\exists z \in \mathrm{IR}$ tale che $(w_1, \ldots, w_{k-1}, z, w_{k+1}, w_n) \in P$

2) $\forall \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n) \in P$
il vettore $(u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_n) \in P'$

Esempio:

P: $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 6$

P': $0 \leq x_1 \leq 2$

poniamo $z = (6 - 3x_1)/2 \geq 0$ $\forall x_1 \in P'$

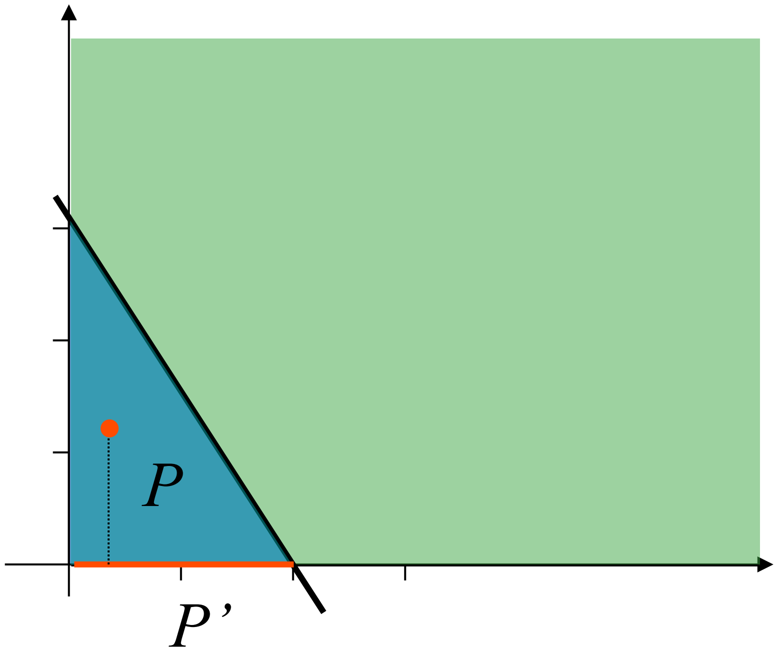
evidentemente $(x_1, (6 - 3x_1)/2) \in P$ $\forall x_1 \in P'$

5. Proiezione di un poliedro

Esempio:

$P\ :$ $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$ $3x_1 + 2x_2 \leq 6$

P': $0 \leq x_1 \leq 2$



$\forall x_1 \in P', \exists z: (x_1, z) \in P$

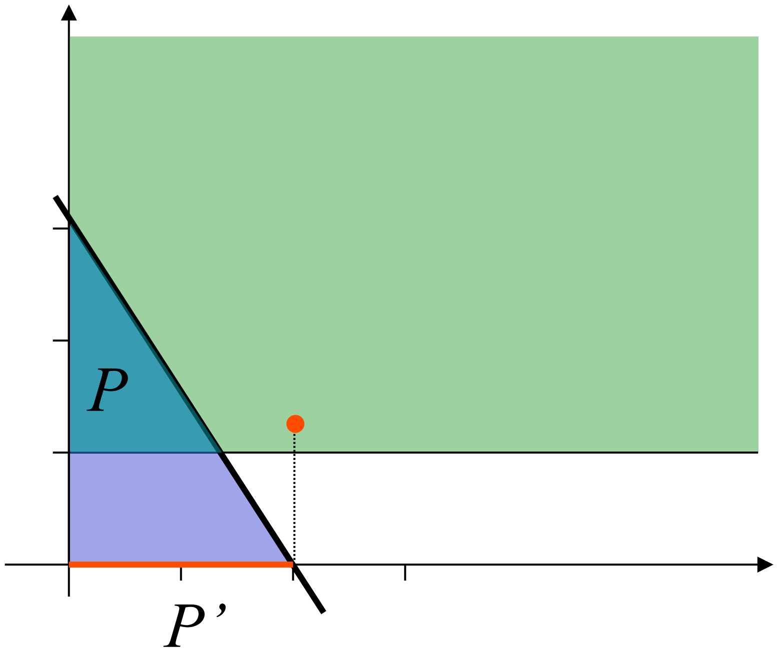
$\Rightarrow$ P' è proiezione di P

5. Proiezione di un poliedro

Esempio:

P : $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 1$ $3x_1 + 2x_2 \leq 6$

P': $0 \leq x_1 \leq 2$



$\nexists\, \mathbf{y} \in P$ tale che $y_1 = 2$

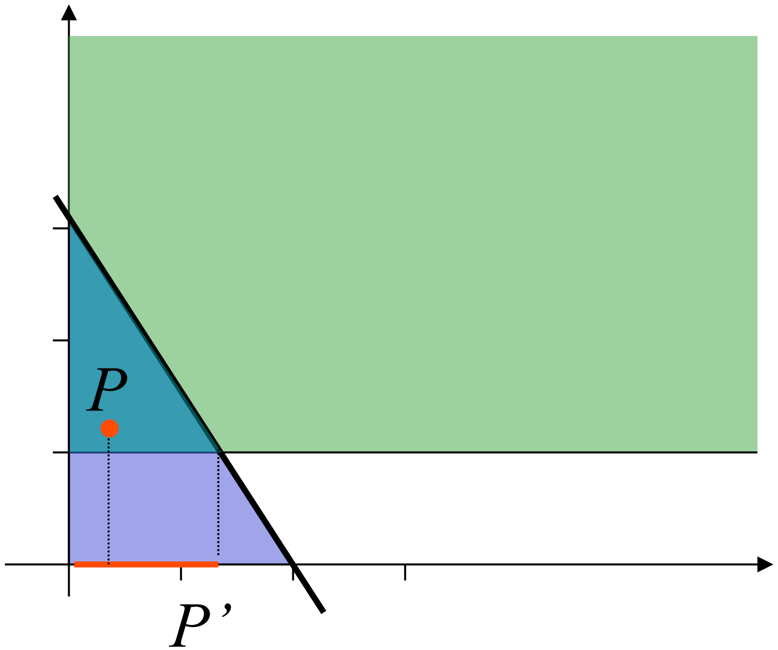
$\Rightarrow$ *P'* non è proiezione di *P* perché non è verificata la (1)

5. Proiezione di un poliedro

Esempio:

P : $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 1$ $3x_1 + 2x_2 \leq 6$

P' : $0 \leq x_1 \leq 4/3$



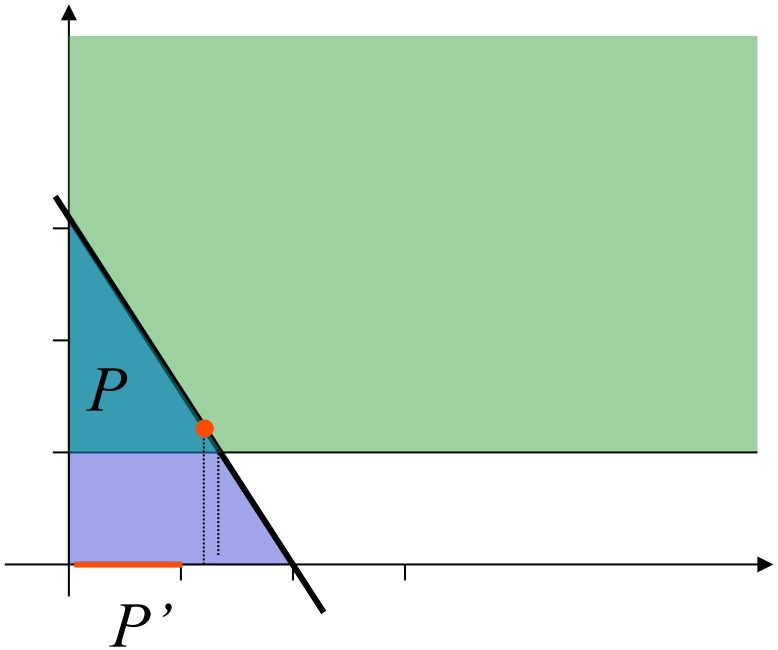
P' è proiezione di P

5. Proiezione di un poliedro

Esempio:

$P\ :\quad x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 1 \qquad 3x_1 + 2x_2 \leq 6$

$P'\ :\quad 0 \leq x_1 \leq 1$



$\exists (u_1, u_2) \in P\text{: } u_1 \notin P'$

$\Rightarrow$ *P'* non è proiezione di *P*
perché non è verificata la (2)

6. Teorema di Fourier

Sia dato il poliedro *P*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

Dividiamo l'insieme delle righe *R* in 3 sottoinsiemi:

$$R_0 = \{i \in R\colon a_{i1} = 0\},\ R^+ = \{i \in R\colon a_{i1} > 0\},\ R^- = \{i \in R\colon a_{i1} < 0\}$$

Costruiamo un nuovo poliedro *P'* contenente:

1) tutte le diseguaglianze di R_0
2) una diseguaglianza per ogni elemento in $R^+ \times R^-$

6. Teorema di Fourier

- Una disequazione del tipo (2) è associata a una riga $h \in R^+$ e una riga $k \in R^-$

$$
\begin{aligned}
a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \ldots + a_{hn}x_n &\leq b_h \quad \Longleftarrow \boxed{\text{riga } h} \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n &\leq b_k \quad \Longleftarrow \boxed{\text{riga } k}
\end{aligned}
$$

- La disequazione di *P'* si ottiene per combinazione conica delle due
  - dividendo la prima per a_{h1}
  - dividendo la seconda per $|a_{k1}|$
  - sommandole insieme

$$
\cancel{\left(\frac{a_{h1}}{a_{h1}} + \frac{a_{k1}}{|a_{k1}|}\right)} x_1 + \left(\frac{a_{h2}}{a_{h1}} + \frac{a_{k2}}{|a_{k1}|}\right) x_2 + \ldots + \left(\frac{a_{hn}}{a_{h1}} + \frac{a_{kn}}{|a_{k1}|}\right) x_n \leq \left(\frac{b_h}{a_{h1}} + \frac{b_k}{|a_{k1}|}\right)
$$

6. Teorema di Fourier

- Il nuovo sistema di disequazioni P’ non contiene la variabile x_1

Teorema (Fourier) *P’* è una proiezione di *P* nello spazio delle variabili $x_2, \ldots, x_n$.

Dimostrazione

- Sia $\mathbf{w} = (w_2, \ldots, w_n) \in P'$. Dobbiamo mostrare che esiste uno scalare z tale che $(z, w_2, \ldots, w_n) \in P$.
- Per ogni $i \in R_0$ si ha $a_{i2}w_2 + \ldots + a_{in}w_n \leq b_i$
- Per ogni $h \in R^+$, $k \in R^-$ si ha inoltre

$$\left(\frac{a_{h2}}{a_{h1}} + \frac{a_{k2}}{|a_{k1}|}\right) w_2 + \ldots + \left(\frac{a_{hn}}{a_{h1}} + \frac{a_{kn}}{|a_{k1}|}\right) w_n \leq \left(\frac{b_h}{a_{h1}} + \frac{b_k}{|a_{k1}|}\right)$$

6. Teorema di Fourier

- Riscriviamo l'ultima condizione

$$\frac{a_{k2} w_2}{|a_{k1}|} + \ldots + \frac{a_{kn} w_n}{|a_{k1}|} - \frac{b_k}{|a_{k1}|} \leq \frac{b_h}{a_{h1}} - \frac{a_{h2} w_2}{a_{h1}} - \frac{a_{hn} w_n}{a_{h1}}$$

- Al variare di k in R^- (di h in R^+) il primo (secondo) membro descrive una classe C (una classe D) di numeri reali, e tutti gli elementi di C risultano $\leq$ degli elementi di D
- Dunque esiste un elemento di separazione z tale che:

$$\frac{a_{k2} w_2}{|a_{k1}|} + \ldots + \frac{a_{kn} w_n}{|a_{k1}|} - \frac{b_k}{|a_{k1}|} \leq z \qquad \forall k \in R^-$$

$$\forall h \in R^+ \qquad z \leq \frac{b_h}{a_{h1}} - \frac{a_{h2} w_2}{a_{h1}} - \frac{a_{hn} w_n}{a_{h1}}$$

6. Teorema di Fourier

- Le ultime due disequazioni si possono riscrivere:

$$a_{k1}z + a_{k2}w_2 + \dots a_{kn}w_n \leq b_k \qquad \forall k \in R^-$$

$$a_{h1}z + a_{h2}w_2 + \dots a_{hn}w_n \leq b_h \qquad \forall h \in R^+$$

- Inoltre, $\forall i \in R_0$ si ha

$$0z + a_{i2}w_2 + \dots a_{in}w_n \leq b_i$$

- Ne segue che $(z, w_2, \dots, w_n) \in P$
- Viceversa, siccome P' è fatto di disequazioni implicate da P, ogni soluzione di P è soluzione anche di P'.

Fine della dimostrazione

7. Algoritmo di Fourier-Motzkin

- Il Teorema di Fourier permette di ridurre il problema di decidere se un poliedro è o meno vuoto a quello di decidere se è o meno vuota una sua proiezione
- Poiché la proiezione di un poliedro è ancora un poliedro, il teorema può essere ripetutamente applicato, fino a pervenire a un poliedro del quale sia semplice decidere
- Ad esempio, si può applicare il teorema $n - 1$ volte: in questo caso il poliedro risultante $P^{(n-1)}$ sarà un intervallo dell'asse reale, eventualmente vuoto o illimitato
- Ovvero, si può applicare il teorema per n volte: in questo caso il poliedro risultante $P^{(n)}$ avrà la forma $\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{t}$. Si danno allora 2 casi:
  - se $\mathbf{t} \geq 0$, $P^{(n)}$ è banalmente compatibile, in quanto descrive l'intero IR^n, e quindi anche P è compatibile;
  - se esiste un indice i tale che $t_i < 0$, allora $P^{(n)}$ è banalmente incompatibile, e così P.

8. Applicazioni

Il metodo di eliminazione di Fourier-Motzkin si può applicare per

- Decidere se un poliedro è vuoto oppure no
- Costruire la rappresentazione implicita di conv(S) per un insieme finito $S \subset \mathrm{IR}^n$
- Risolvere un problema di Programmazione Lineare

9. Esempio

Sia P il poliedro costituito dalle $\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^3$ tali che

$$\begin{array}{lcr}
3x_1 - x_2 & \leq & 4 \\
x_1 \qquad\quad - 2x_3 & \leq & -6 \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 2 \\
x_1 & \geq & 0
\end{array}$$

Vogliamo capire se $P \neq \emptyset$

9. Esempio

Riportiamo tutte le diseguaglianze in forma di $\leq$, e costruiamo una tabella contenente i coefficienti del sistema

1)	3	–1	0	4
2)	1	0	–2	–6
3)	2	2	1	2
4)	–1	0	0	0

(in colore rosso sono riportati i termini noti
in blu gli indici di riga)

9. Esempio

1)	3	–1	0	4
2)	1	0	–2	–6
3)	2	2	1	2
4)	–1	0	0	0

Scegliamo una variabile (colonna) da eliminare. La scelta può essere effettuata in base al numero di nuove righe generate dall'eliminazione.

- Dall'eliminazione della colonna 1 nascono $3 \times 1 = 3$ nuove righe.
- Dall'eliminazione della colonna 2 o della colonna 3 ne nascono $2 + 1 \times 1 = 3$.

Decidiamo di eliminare la colonna 2, in quanto 2 delle nuove righe provengono dall'insieme R_0, e sono pertanto già presenti in tabella.

9. Esempio

1)	3	–1	0	4
2)	1	0	–2	–6
3)	2	2	1	2
4)	–1	0	0	0

Gli insiemi R_0, R^+ e R^- risultano così costituiti:

$S_0 = \{2, 4\}$ $S^+ = \{3\}$ $S^- = \{1\}$

Pertanto, $R^+ \times R^-$ contiene la sola coppia 31.

La riga corrispondente si ottiene moltiplicando per 2 la riga 1 e sommandola alla riga 3. La tabella si riscrive

2)	1	0	–2	–6
4)	–1	0	0	0
31)	8	0	1	10

9. Esempio

Rinumeriamo le righe della tabella ottenuta.

1)	1	0	–2	–6
2)	–1	0	0	0
3)	8	0	1	10

Conviene ora applicare il metodo alla colonna 3. Si ha

$$R_0 = \{2\}, R^+ = \{3\}, R^- = \{1\}$$

e ancora una volta $R^+ \times R^-$ contiene la sola coppia 31.

La riga corrispondente si ottiene moltiplicando per 2 la riga 3 e sommandola alla riga 1. La tabella si riscrive

2)	–1	0	0	0
31)	17	0	0	14

9. Esempio

Questa tabella corrisponde al sistema

$$
\begin{array}{lrcl}
1) & x_1 & \geq & 0 \\
2) & 17x_1 & \leq & 14
\end{array}
$$

La proiezione P'' di P sull'asse x_1 è dunque rappresentata dall'intervallo (non vuoto) [0, 14/17]. Quindi anche P è non vuoto. In particolare possiamo ottenere un punto di P scegliendo un $x_1 \in P''$ e ricavando x_2 e x_3 in base alle tabelle precedenti.

Poniamo ad esempio $x_1 = 0$. Dalla prima tabella della pagina precedente ricaviamo le condizioni

$$
\begin{array}{lrclcrcl}
1) & -2x_3 & \leq & -6 & \text{cioè} & x_3 & \geq & 3 \\
3) & x_3 & \leq & 10 & & & &
\end{array}
$$

Quindi $x_3 \in [3, 10]$. Possiamo scegliere ad esempio $x_3 = 4$.

9. Esempio

Sostituendo ora $x_1 = 0$ e $x_3 = 4$ nella tabella iniziale

1)	3	–1	0	4
2)	1	0	–2	–6
3)	2	2	1	2
4)	–1	0	0	0

ricaviamo le condizioni

$$\begin{aligned} -x_2 &\leq 4 \\ 2x_2 + 4 &\leq 2 \end{aligned}$$

vale a dire $x_2 \in [-4, -1]$. Una soluzione del sistema è quindi ad esempio

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = 4$$