



Esercizio sul metodo del simplesso

Metodo del simplesso

Si consideri il problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ & \tau x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 \leq -1 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Stabilire se esistono valori di τ per cui il punto $x^* = (0 \ 1 \ 0)$ è una soluzione ottima.

Oss. x^* è una soluzione ammissibile per ogni valore di τ .

Metodo del simplesso

Trasformiamo il problema in forma standard

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \tau \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 1 \\ & 2x_1 + x_2 + s_2 = 2 \\ & x_1 - x_2 + s_3 = -1 \\ & x_i, s_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Il valore delle variabili di slack associate alla soluzione

$$x^* = (0 \ 1 \ 0) \text{ è } s^* = (0 \ 1 \ 0).$$

Metodo del simplesso

La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \tau & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Il rango della matrice A è 3, quindi una base sarà formata da tre colonne linearmente indipendenti. Una base associata alla soluzione (x^*, s^*) , deve contenere le colonne associate alle variabili non nulle x_2^* e s_2^* più una colonna associata ad una variabile nulla (*base degenera*).

Metodo del simplesso

Quali sono le possibili basi associate alla soluzione (x^*, s^*) ?

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \tau & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_3 & s_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & s_1 & s_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & s_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \tau & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Metodo del simplesso

$$B_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_2 & x_3 & s_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

E' una base?

$$\det(B_1) = -2 \neq 0$$

Verifichiamo che la SBA associata a B_1 sia (x^*, s^*) .

$$\begin{aligned} x_{B_1} &= B_1^{-1}b \\ x_{F_1} &= 0 \end{aligned} \quad B_1^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^* \\ x_3^* \\ s_2^* \end{pmatrix}$$

E' ottima?

Metodo del simplesso

Sia x^* una SBA associata alla base B .

Se $\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0^T$ allora x^* è una soluzione ottima.

Osservazione

$$\bar{c}^T = \left(\underbrace{c_B^T - c_B^T B^{-1} B}_{=0}, c_F^T - c_B^T B^{-1} F \right)$$

Quindi la condizione da verificare è

$$c_F^T - c_B^T B^{-1} F \geq 0$$

Metodo del simplesso

$$c_F^T - c_B^T B^{-1} F \geq 0$$

$$B_1^{-1} F_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{s}_2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_3 \\ \tau & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ (\tau+1)/2 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_{B_1}^T B_1^{-1} F_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{s}_2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ (\tau+1)/2 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-\tau-2 \quad -1 \quad -2)$$

Metodo del simplesso

$$c_F^T - c_B^T B^{-1} F \geq 0$$

$$\begin{aligned} c_{F_1}^T - c_{B_1}^T B_1^{-1} F_1 &= \begin{pmatrix} \overset{x_1}{2} & \overset{s_1}{0} & \overset{s_3}{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\tau - 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 + \tau & 1 & 2 \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \tau \geq -4 \end{aligned}$$

- La condizione di ottimalità che abbiamo utilizzato è una condizione sufficiente ma non necessaria. Quindi possono esistere altri valori di τ per cui la soluzione x^* sia ottima.
- Inoltre, ad una stessa soluzione possono essere associate basi diverse. Quindi dobbiamo ripetere la stessa procedura per ciascuna delle basi enumerate.

Metodo del simplesso

$$B_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_2 & s_1 & s_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

E' una base?

$$\det(B_2) = -1 \neq 0$$

$$c_F^T - c_B^T B^{-1} F \geq 0$$

$$B_2^{-1} F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} x_1 & x_3 & s_3 \\ \begin{pmatrix} \tau & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ \tau+1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Metodo del simplesso

$$c_F^T - c_B^T B^{-1} F \geq 0$$

$$c_{B_2}^T B_2^{-1} F_2 = \overset{x_2}{(1} \ \overset{s_1}{0} \ \overset{s_2}{0}) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ \tau+1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1 \ 0 \ -1)$$

$$\begin{aligned} c_{F_2}^T - c_{B_2}^T B_2^{-1} F_2 &= (\overset{x_1}{2} \ \overset{x_3}{-2} \ \overset{s_3}{0}) - (-1 \ 0 \ -1) = \\ &= (3 \ -2 \ 1) \not\geq 0 \end{aligned}$$

Rispetto alla base B_2 , non è soddisfatta la condizione di ottimalità.

Metodo del simplesso

$$B_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \tau & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

E' una base?

$\det(B_3) = 1 + \tau \neq 0$ se e solo se
 $\tau \neq -1$

$$c_F^T - c_B^T B^{-1} F \geq 0$$

$$B_3^{-1} F_3 = \frac{1}{1+\tau} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\tau \\ -3 & \tau+1 & \tau-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} x_3 & s_1 & s_3 \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = \frac{1}{1+\tau} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -\tau \\ -6 & -3 & \tau-2 \end{pmatrix}$$

Metodo del simplesso

$$c_F^T - c_B^T B^{-1} F \geq 0$$

$$c_{B_3}^T B_3^{-1} F_3 = \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -\tau \\ -6 & -3 & \tau-2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1+\tau} = \frac{1}{1+\tau} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2-\tau \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_{F_3}^T - c_{B_3}^T B_3^{-1} F_3 &= \begin{matrix} x_3 & s_1 & s_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{1+\tau} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2-\tau \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{1+\tau} \begin{pmatrix} -8-2\tau & -3 & \tau-2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Metodo del simplesso

$$c_{F_3}^T - c_{B_3}^T B_3^{-1} F_3 = \frac{1}{1+\tau} (-8-2\tau \quad -3 \quad \tau-2) \geq 0$$

$$\Updownarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{-8-2\tau}{1+\tau} \geq 0 \\ \frac{-3}{1+\tau} \geq 0 \\ \frac{\tau-2}{1+\tau} \geq 0 \end{array} \right.$$

Ovvero

$$\left\{ \begin{array}{l} -8-2\tau \leq 0 \\ 1+\tau < 0 \\ \tau-2 \leq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tau \geq -4 \\ \tau < -1 \\ \tau \leq 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow -4 \leq \tau < -1$$

Metodo del simplesso

$$B_4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_2 & s_2 & s_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

E' una base?

$$\det(B_4) = 1 \neq 0$$

$$c_F^T - c_B^T B^{-1} F \geq 0$$

$$B_4^{-1} F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} x_1 & x_3 & s_1 \\ \begin{pmatrix} \tau & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} \tau & 2 & 1 \\ -\tau+2 & -2 & -1 \\ \tau+1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Metodo del simplesso

$$c_F^T - c_B^T B^{-1} F \geq 0$$

$$c_{B_4}^T B_4^{-1} F_4 = (\overset{x_2}{1} \quad \overset{s_2}{0} \quad \overset{s_3}{0}) \cdot \begin{pmatrix} \tau & 2 & 1 \\ -\tau+2 & -2 & -1 \\ \tau+1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (\tau \quad 2 \quad 1)$$

$$\begin{aligned} c_{F_4}^T - c_{B_4}^T B_4^{-1} F_4 &= (\overset{x_1}{2} \quad \overset{x_3}{-2} \quad \overset{s_1}{0}) - (\tau \quad 2 \quad 1) = \\ &= (2 - \tau \quad -4 \quad -1) \not\geq 0 \end{aligned}$$

Rispetto alla base $B_{4'}$ non è soddisfatta la condizione di ottimalità.

Metodo del simplesso

In conclusione, il punto $x^* = (0 \ 1 \ 0)$ è una soluzione ottima del problema

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \tau x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 & \leq 2 \\ x_1 - x_2 & \leq -1 \\ x_i & \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$$\text{se } \tau \geq -4 \quad \cup \quad -4 \leq \tau < -1 \quad \Rightarrow \quad \tau \geq -4.$$