Esercitazione 2

Modelli di PL

- Problemi con valori assoluto
- Problemi di pianificazione multi-periodo

Problemi con i valori assoluti

Si consideri il seguente problema

$$(P): \quad \begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i \,|\, x_i \,| \\ & Ax \geq b \end{aligned}$$

dove $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ c_i \geq 0\ \forall i = 1, \ldots, n.$

Oss. $|x_i|$ è il più piccolo numero z_i tale che $z_i \geq x_i,\ z_i \geq -x_i$.

$$(R): \quad \begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i z_i \\ & Ax \geq b \\ & z_i \geq x_i \quad i = 1, \ldots, n \\ & z_i \geq -x_i \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Problemi con i valori assoluti

I problemi (P) e (R) non sono equivalenti, ma o sono entrambi inammissibili o ammettono lo stesso valore ottimo della funzione obiettivo.

Questo non è più vero se la condizione $c_i \geq 0$ non è soddisfatta.

Esempio

$$\begin{aligned} \min\ & 2|x_1| + x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 4 \end{aligned} \quad \xrightarrow{z_1 \mapsto |x_1|} \quad \begin{aligned} \min\ & 2z_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & z_1 \geq x_1 \\ & z_1 \geq -x_1 \end{aligned}$$

Problemi con i valori assoluti

Si consideri il seguente problema

$$(P): \quad \begin{aligned} \min \quad & c^T x + d^T y \\ & Ax + By \leq b \\ & y_i = |x_i| \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

dove B e d sono non negativi. Associando una variabile z_i al $|x_i|$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, scriviamo il seguente problema

$$(R): \quad \begin{aligned} \min \quad & c^T x + d^T z \\ & Ax + Bz \leq b \\ & z_i \geq x_i \quad i = 1, \ldots, n \\ & z_i \geq -x_i \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Problemi con i valori assoluti

I problemi (P) e (R) non sono equivalenti, ma se ammettono soluzione ottima, i valori ottimi della funzione obiettivo coincidono.

Infatti, supponiamo per assurdo che la soluzione ottima di (R), (x^*, z^*), sia tale che $z_i^* = |x_i^*| + h_i$ con $h_i \geq 0$ per $i = 1, \ldots, n$, con almeno un $h_j > 0$. Il vettore $(x^*, \underline{z}^*)$, dove $\underline{z}_i^* = z_i^* - h_i$ è una soluzione ammissibile per (R) di costo inferiore a (x^*, z^*). ➡ ASSURDO!

Esercizio

Riformulare (P) come problema di programmazione lineare

$$(P):\quad \begin{aligned} &\min 2x_1 + 3|x_2 - 10| \\ &|x_1 + 2| + |x_2| \leq 5 \end{aligned}$$

Effettuiamo un cambio di variabili

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_2 - 10 \\ \tilde{x}_2 &= x_1 + 2 \\ \tilde{x}_3 &= x_2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\min 2\tilde{x}_2 - 4 + 3|\tilde{x}_1| \\ &|\tilde{x}_2| + |\tilde{x}_3| \leq 5 \\ &\tilde{x}_3 = \tilde{x}_1 + 10 \end{aligned}$$

Esercizio

Essendo la matrice dei coefficienti B e il vettore dei costi d non negativi possiamo applicare la procedura precedente.

$$\begin{aligned} z_1 &\mapsto |\tilde{x}_1| \\ z_2 &\mapsto |\tilde{x}_2| \\ z_3 &\mapsto |\tilde{x}_3| \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\min 2\tilde{x}_1 - 4 + 3z_2 \\ &z_1 + z_3 \leq 5 \\ &z_i \geq \tilde{x}_i \quad i = 1,2,3 \\ &z_i \geq -\tilde{x}_i \quad i = 1,2,3 \\ &\tilde{x}_3 = \tilde{x}_1 + 10 \end{aligned}$$

Problemi di pianificazione multi-periodo

Uno stato vuole pianificare la propria capacità di produzione di energia elettrica dei prossimi T anni.

- d_t fabbisogno di energia nell' anno $t \in \{1, \ldots, T\}$.
- e_t energia disponibile nell' anno $t \in \{1, \ldots, T\}$ dagli impianti attuali.

Esistono due tipi di impianti per aumentare la produzione:

- carbone, costo fisso di installazione c_t per megawatt e durata 20 anni;
- nucleari, costo fisso di installazione n_t per megawatt e durata 15 anni.

Per ragioni di sicurezza la capacità degli impianti nucleari non deve superare ogni anno il 20% della capacità totale.

Problemi di pianificazione multi-periodo

Preparare un Piano di Produzione dell'energia equivale a decidere la capacità produttiva degli impianti a carbone e di quelli nucleari in ogni anno $t \in \{1,\dots,T\}$.

Problema: determinare un piano di produzione tale che

- la domanda di energia d_t sia soddisfatta in ogni anno $t \in \{1,\dots,T\}$.
- siano rispettati i vincoli sulla durata degli impianti e di sicurezza.
- il costo complessivo di espansione della produzione sia minimo.

Problemi di pianificazione multi-periodo

Variabili:

- x_t capacità da carbone installata all'inizio dell' anno t.
- y_t capacità da nucleare installata all'inizio dell' anno t.

- w_t capacità da carbone disponibile nell' anno t.
- z_t capacità da nucleare disponibile nell' anno t.

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{t=1}^{T} (c_t x_t + n_t y_t)$$

Problemi di pianificazione multi-periodo

Capacità da carbone e nucleare disponibile nell' anno t

$$w_t = \sum_{s=\max\{1,t-19\}}^{t} x_s \qquad t = 1,\cdots,T$$

$$z_t = \sum_{s=\max\{1,t-14\}}^{t} y_s \qquad t = 1,\dots,T$$

Capacità nucleare non superiore al 20% della capacità totale

$$\frac{z_t}{w_t + z_t + e_t} \le 0.2, \qquad t = 1,\dots,T$$

Copertura della domanda nel periodo t

$$w_t + z_t + e_t \ge d_t, \qquad t = 1,\dots,T$$

Problemi di pianificazione multi-periodo

Formulazione

$$\min \sum_{j=1}^{n} (c_t x_t + n_t y_t)$$

$$w_t - \sum_{s=\max\{1,t-19\}} x_s = 0 \quad t = 1,\dots,T$$

$$z_t - \sum_{s=\max\{1,t-14\}} y_s = 0 \quad t = 1,\dots,T$$

$$w_t + z_t \ge d_t + e_t \quad t = 1,\dots,T$$

$$0.8 z_t - 0.2 w_t \le 0.2 e_t \quad t = 1,\dots,T$$

$$y_t, x_t, w_t, z_t \ge 0 \quad t = 1,\dots,T$$