Claudio Arbib
Università dell'Aquila

Ricerca Operativa

Il Metodo di Dijkstra

Il metodo di Dijkstra

- Il metodo di Dijkstra consente di calcolare il sottografo Z costituito da tutti gli (s, u)-cammini di peso minimo in un grafo $G = (V, E)$ per $u \in V$, dove s è un vertice fissato di G
- Indicata con y_u^* la distanza del nodo u da s (cioè il peso del più breve (s, u)-cammino), il metodo procede attraverso la costruzione incrementale dell'insieme S dei nodi a distanza nota
- Il metodo si arresta quando y_u^* è stata calcolata per ogni $u \in V$, ovvero, nel caso di calcolo di (s, t)-cammino ottimo, quando si è calcolata y_t^*. La correttezza del metodo è garantita se $c_{uv} \geq 0$ per ogni $uv \in E$

Codifica del metodo di Dijkstra

1) **Inizializzazione.** $S := \{s\}$, $y_s^* := 0$; $Z := \emptyset$;

2) **Calcolo dei vicini.** Sia $R(S)$ l'insieme dei nodi di $V–S$ raggiungibili da S con un solo arco,
$$R(S) := \{v \in V–S:\ uv \in E,\ u \in S\};$$

3) **Distanza provvisoria.** Si associa a ogni $v \in R(S)$ una distanza provvisoria y_v calcolata come
$$y_v := \min_{u \in S}\{y_u^* + c_{uv}\}$$

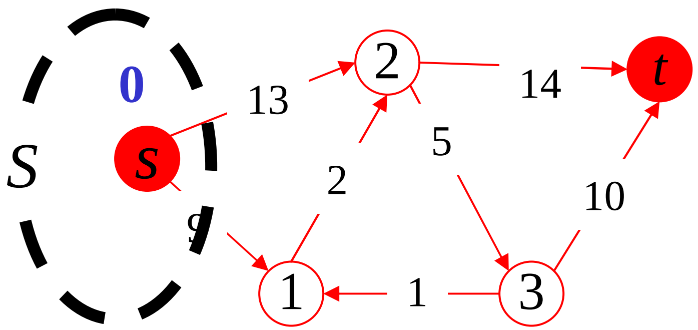
4) **Distanza definitiva.** Si sceglie il nodo w di $R(S)$ con minima distanza provvisoria, e la si rende definitiva:
$$y_w^* := \min_{v \in R(S)}\{y_v\} = y_u^* + c_{uw}$$

5) **Aggiornamento di *S* e *Z*.** $S := S \cup \{w\}$; $Z := Z \cup \{uw\}$

6) **Criterio di Arresto.** Se $S = V$ (o se $w = t$) l'algoritmo termina, altrimenti si ripete il passo **2**.

Esempio

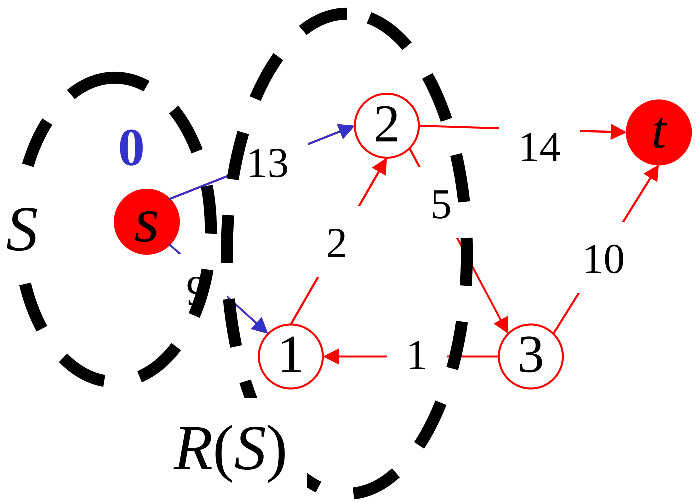
1) Inizializzazione. $S := \{s\}$, $y_s^* := 0$;



Esempio

2) **Calcolo dei vicini.** Sia $R(S)$ l'insieme dei nodi di $V-S$ raggiungibili da S con un solo arco,

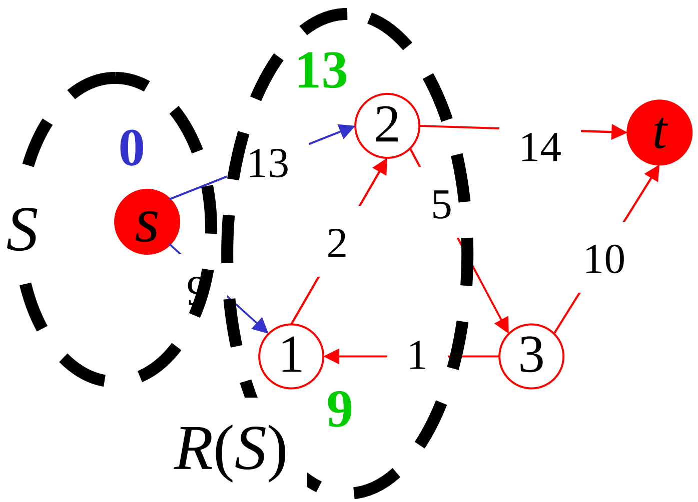
$$R(S) := \{v \in V-S:\ uv \in E,\ u \in S\};$$



Esempio

3) **Distanza provvisoria.** Si associa a ogni $v \in R(S)$ una distanza provvisoria y_v calcolata come

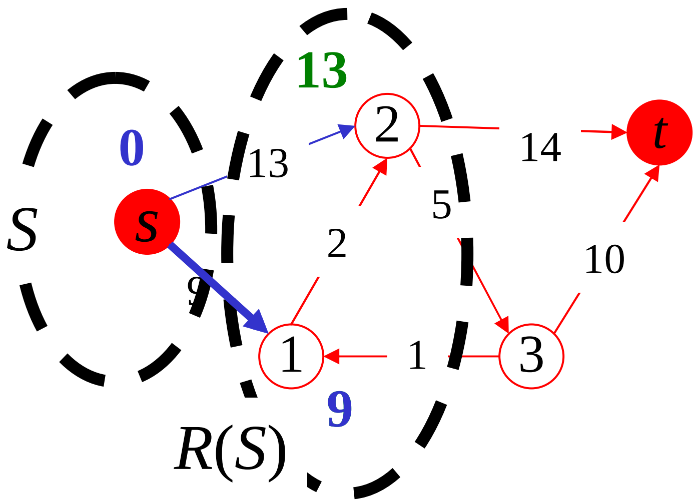
$$y_v := \min_{u \in S}\{y_u^* + c_{uv}\}$$



Esempio

4) Distanza definitiva. Si sceglie il nodo w di $R(S)$ con minima distanza provvisoria, e la si rende definitiva:

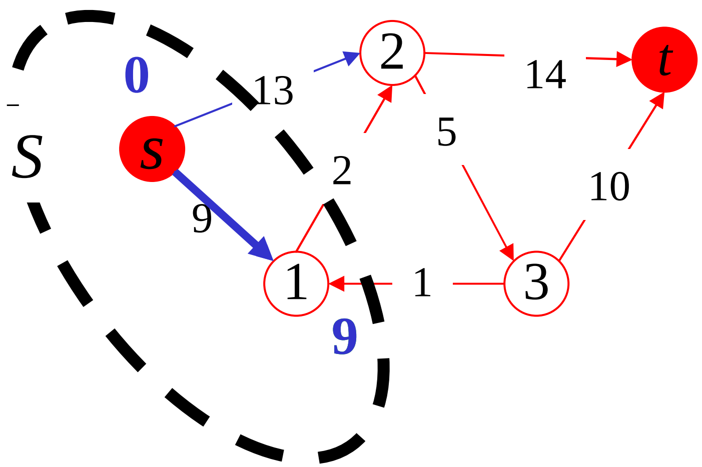
$$y_w^* := \min_{v \in R(S)}\{y_v\} = y_u^* + c_{uw}$$



Esempio

5) **Aggiornamento di *S* e *Z*.** $S := S \cup \{w\}$; $Z := Z \cup \{uw\}$

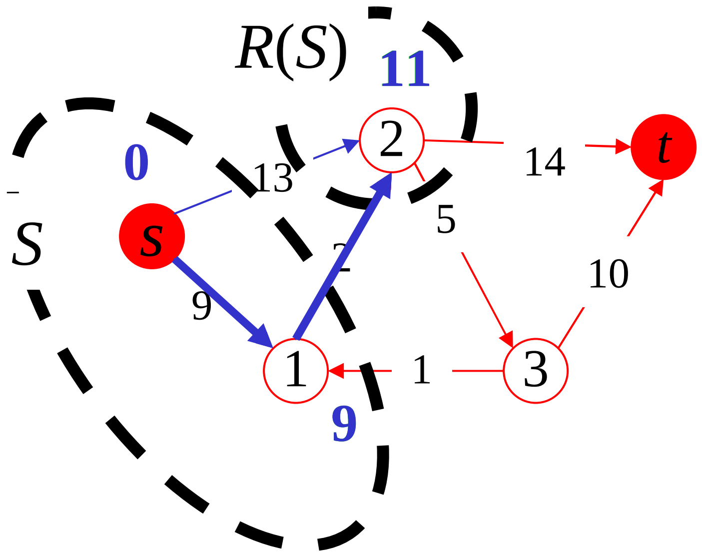
6) **Criterio di Arresto.** Se $S = V$ (o se $w = t$) l'algoritmo termina, altrimenti si ripete il passo **2**.



Esempio

2) **Calcolo dei vicini.** Sia $R(S)$ l'insieme dei nodi di $V-S$ raggiungibili da S con un solo arco,

$$R(S) := \{v \in V-S\colon\ uv \in E,\ u \in S\};$$



3) **Distanza provvisoria.** Si associa a ogni $v \in R(S)$ una distanza provvisoria y_v calcolata come

$$y_v := \min_{u \in S}\{y_u^* + c_{uv}\}$$

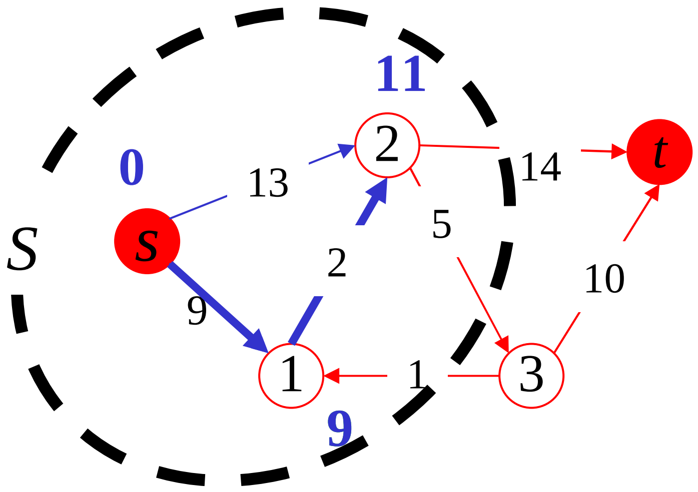
4) **Distanza definitiva.** Si sceglie il nodo w di $R(S)$ con minima distanza provvisoria, e la si rende definitiva:

$$y_w^* := \min_{v \in R(S)}\{y_v\}$$

Esempio

5) **Aggiornamento di *S* e *Z*.** $S := S \cup \{w\}$; $Z := Z \cup \{uw\}$

6) **Criterio di Arresto.** Se $S = V$ (o se $w = t$) l'algoritmo termina, altrimenti si ripete il passo **2**.



2) **Calcolo dei vicini.** Sia $R(S)$ l'insieme dei nodi di $V–S$ raggiungibili da S con un solo arco, … …

Correttezza del metodo

Teorema Per ogni $s \in V$, il vettore $\{y_u^*\}_{u \in V}$ calcolato dal metodo di Dijkstra fornisce le distanze da s di tutti i nodi $u \in V$.

Dimostrazione Per induzione.

Anzitutto, siccome $c_{uv} \geq 0$, la distanza di s da se stesso è $y_s^* = 0$.

Indichiamo ora con S_k l'insieme S calcolato all'iterazione k, e supponiamo che la distanza di u da s sia y_u^* per ogni $s \in S_k$.

Facciamo vedere che, se w è il nodo aggiunto a S_k all'iterazione $k + 1$, y_w^* rappresenta correttamente la distanza di w da S.

Correttezza del metodo

… segue dimostrazione

Supponiamo per assurdo che esista un (s, w)-cammino P di lunghezza $d < y_w^*$.

Poiché P inizia in S_k e termina fuori da S_k, esiste un arco $ab \in P$ con $a \in S_k$, $b \in R(S_k)$.

Siccome $w \in R(S_k)$ e, dal passo 4 dell'algoritmo,

$$y_w^* := \min_{v \in R(S_k)} \{y_v\}$$

si ha

(1) $$y_w^* \leq y_b.$$

Poiché d'altronde $c_{uv} \geq 0 \; \forall uv \in E$, gli archi di P da b a w avranno un peso complessivo ≥ 0, ossia

(2) $$y_b \leq d$$

Dalle (1) e (2) si perviene allora a $y_w^* \leq d$, contraddizione.