Claudio Arbib
Università dell'Aquila

Ricerca Operativa

Problemi di cammino ottimo

Sommario

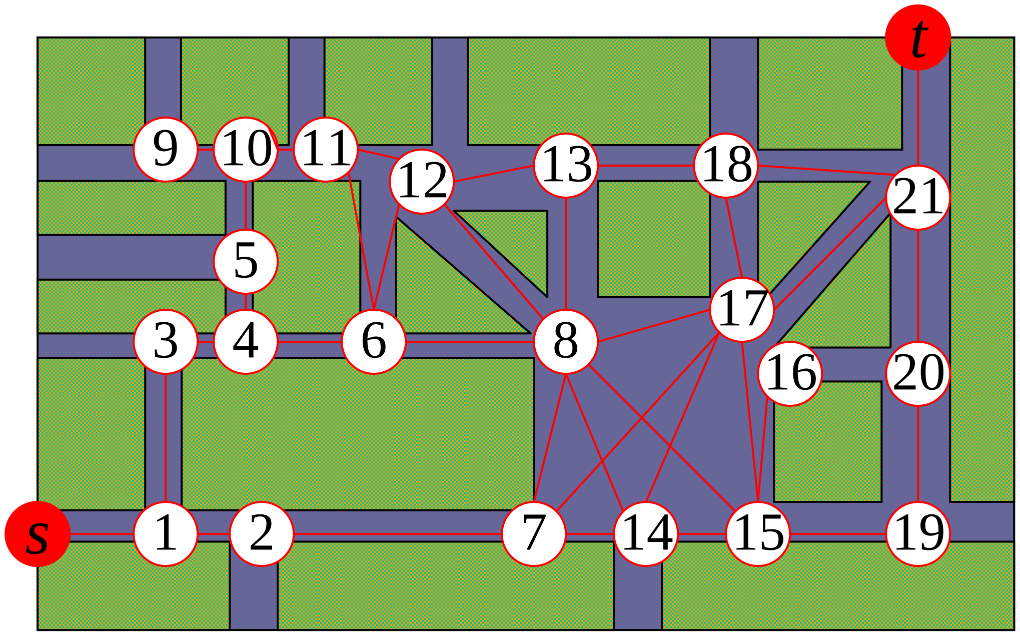
- Il problema del cammino più breve
- Il problema del cammino più sicuro
- Una formulazione come PL 0-1
  - Proprietà della formulazione
  - Risoluzione come programmazione lineare
- Applicazione del metodo primale-duale
- Confronto con il metodo di Dijkstra

Il cammino più breve

- Trovandovi in *s* volete raggiungere il punto *t*. Qual è la strada più breve?

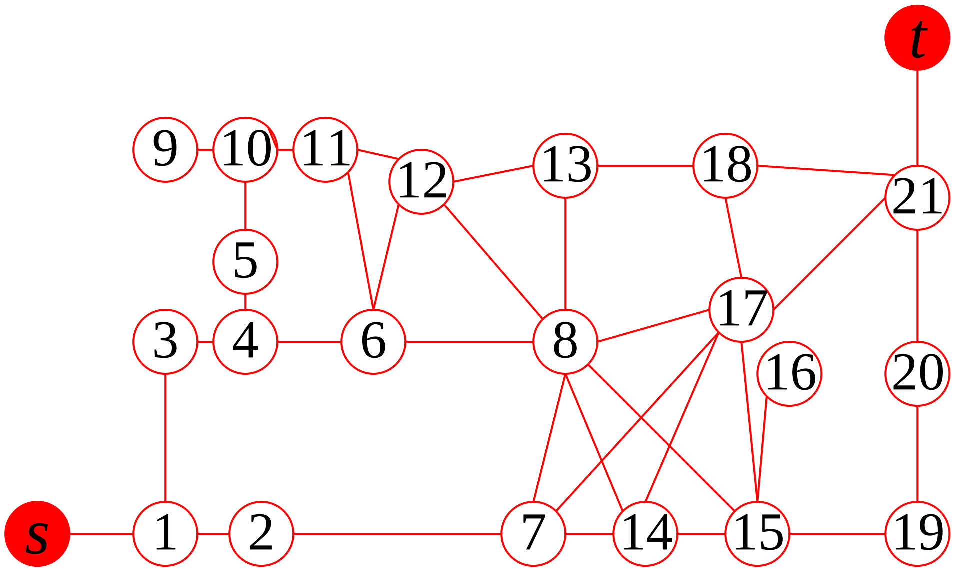
Il cammino più breve

- Trovandovi in *s* volete raggiungere il punto *t*. Qual è la strada più breve?



Il cammino più breve

- Associando a ogni arco *uv* del grafo un peso c_{uv} pari alla distanza tra i suoi estremi, si tratta di trovare un (*s*, *t*)-cammino di peso minimo



Cos'è un (*s*, *t*)-cammino?

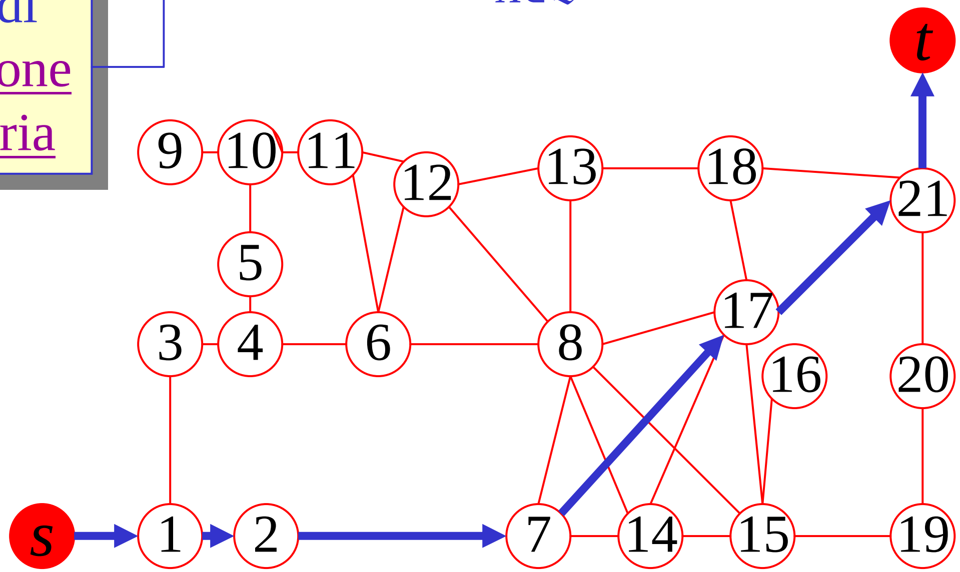
Il cammino più breve

Per ogni $X \subseteq E$, il peso di X è $c(X) = \sum_{uv \in X} c_{uv}$

$\Im = \{X \subseteq E\text{: } X \text{ è un } (s, t)\text{-cammino}\}$

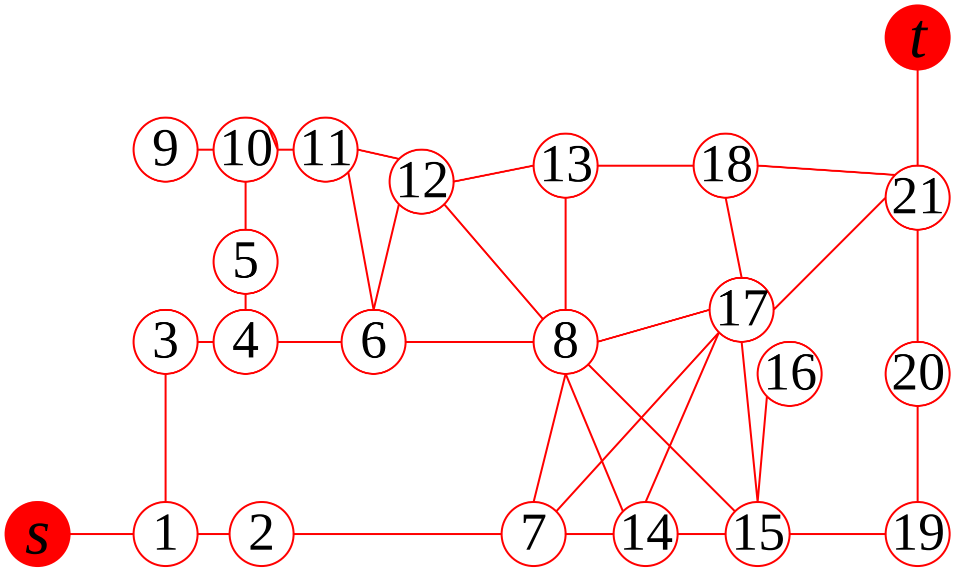
Problema di ottimizzazione combinatoria

$\min_{X \in \Im} c(X)$



Il cammino più sicuro

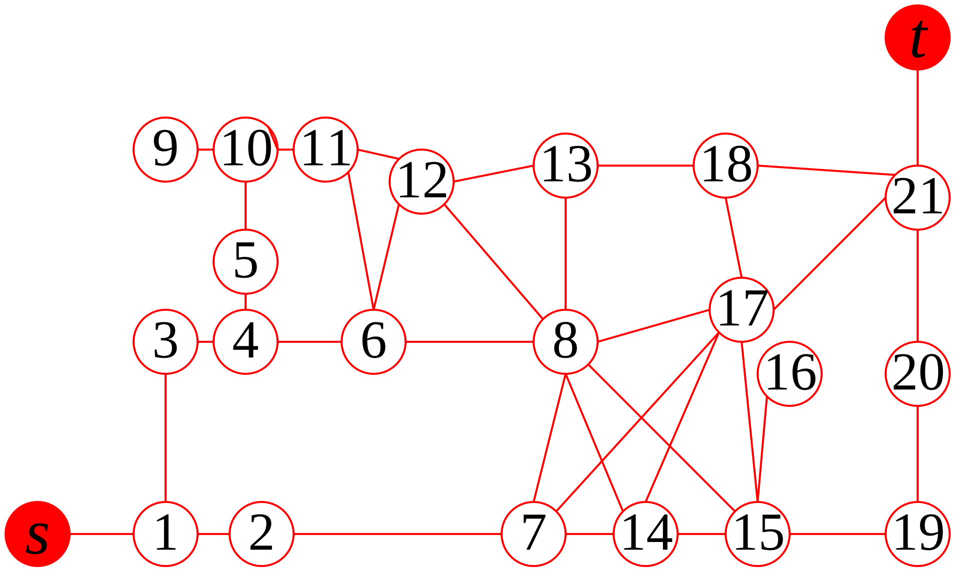
Se la città pullula di delinquenti, è tuttavia meglio cercare di minimizzare la probabilità di incontrarli



Il cammino più sicuro

Sia p_{uv} la probabilità di **non** incontrare delinquenti lungo il tratto *uv*.

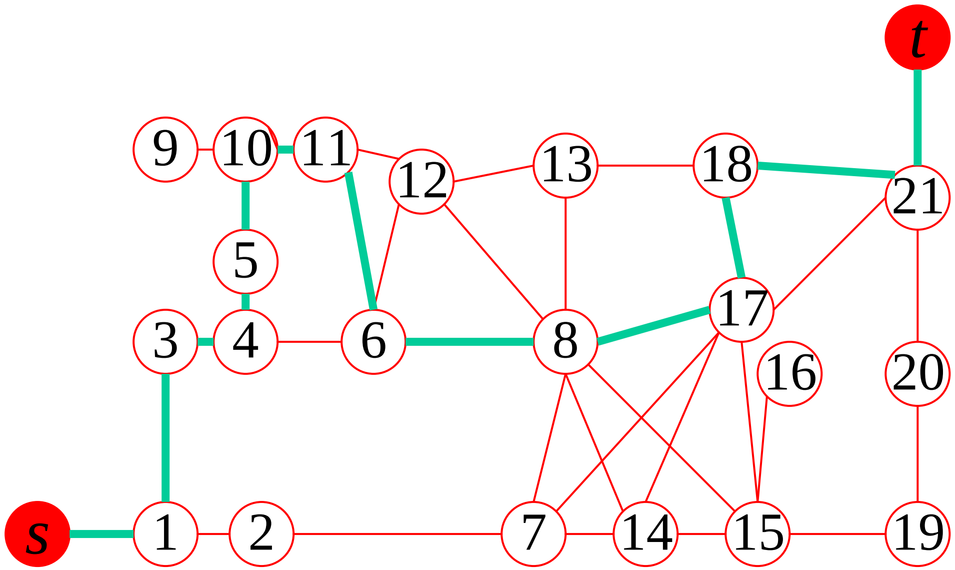
Se le probabilità associate ad archi diversi sono indipendenti, la probabilità di non incontrarne lungo *uv* **e** *vw* è $p_{uv} \cdot p_{vw}$



Il cammino più sicuro

Sia p_{uv} la probabilità di **non** incontrare delinquenti lungo il tratto *uv*.

Se le probabilità associate ad archi diversi sono indipendenti, la probabilità di non incontrarne lungo *uv* **e** *vw* è $p_{uv} \cdot p_{vw}$



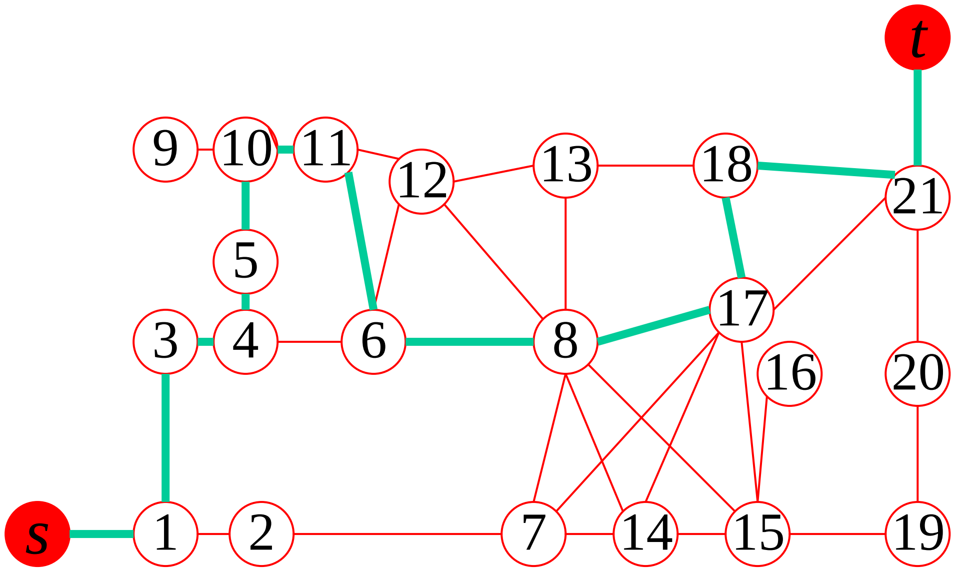
La probabilità di non incontrare delinquenti lungo il cammino verde è

$$p_{s,1} \cdot p_{1,3} \cdot p_{3,4} \cdot p_{4,5} \cdot p_{5,10} \cdot p_{10,11} \cdot p_{11,6} \cdot p_{6,8} \cdot p_{8,17} \cdot p_{17,18} \cdot p_{18,21} \cdot p_{21,t}$$

Il cammino più sicuro

Per ogni $X \subseteq E$, il peso di X è $p(X) = \Pi_{uv\in X}\, p_{uv}$

$\max_{X\in \Im}\, p(X)$



La probabilità di non incontrare delinquenti lungo il cammino verde è

$p_{s,1} \cdot p_{1,3} \cdot p_{3,4} \cdot p_{4,5} \cdot p_{5,10} \cdot p_{10,11} \cdot p_{11,6} \cdot p_{6,8} \cdot p_{8,17} \cdot p_{17,18} \cdot p_{18,21} \cdot p_{21,t}$

Il cammino più sicuro

Per ogni $X \subseteq E$, il peso di X è $p(X) = \Pi_{uv\in X}\, p_{uv}$

$$\max_{X\in \Im} p(X)$$

$$\Updownarrow$$

$$\max_{X\in \Im} \log[p(X)]$$

$$= \max_{X\in \Im} \log[\Pi_{uv\in X}\, p_{uv}]$$

$$= \max_{X\in \Im} \sum_{uv\in X} \log(p_{uv})$$

$$= \min_{X\in \Im} \sum_{uv\in X} [-\log(p_{uv})]$$

Ponendo $c_{uv} = -\log(p_{uv}) > 0$
ci si riconduce al problema di trovare
un (s, t)-cammino X di peso $c(X)$ minimo

Formulazione come PL 0-1

Sia $x_{uv} \in \{0, 1\}$ con il seguente significato:

$x_{uv} = 1 \quad \Rightarrow \quad uv \in$ al cammino X cercato

$x_{uv} = 0 \quad \Rightarrow \quad uv \notin$ al cammino X cercato

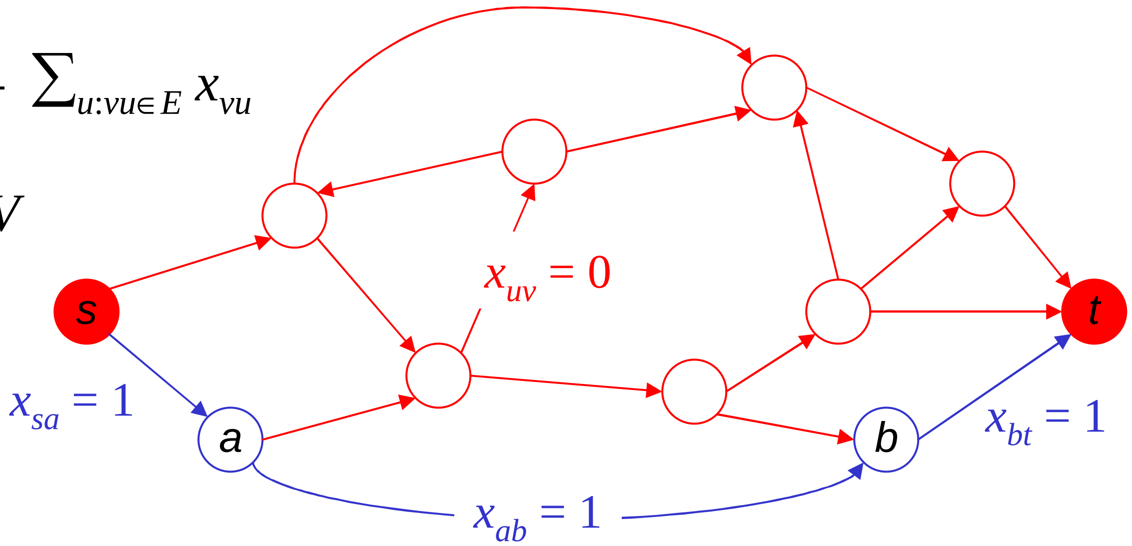
Il peso di X si scrive dunque

$$\mathbf{cx} = \sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$$

Osserviamo ora il comportamento dell'espressione

$$\sum_{u:uv \in E} x_{uv} - \sum_{u:vu \in E} x_{vu}$$

al variare di $v \in V$



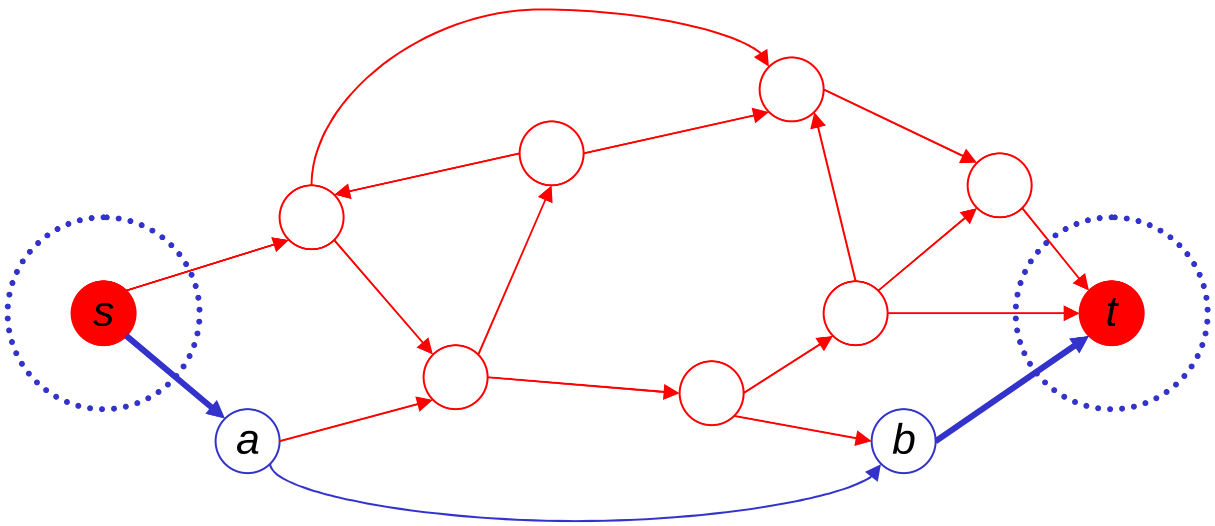
Formulazione come PL 0-1

Per $v = s$ vi è un solo arco di P che esce dal nodo

$$\sum_{u:uv\in E} x_{uv} - \sum_{u:vu\in E} x_{vu} \quad = \quad -\sum_{u:su\in E} x_{su} \;=\; -1$$

Per $v = t$ vi è un solo arco di P che entra nel nodo

$$\sum_{u:uv\in E} x_{uv} - \sum_{u:vu\in E} x_{vu} \quad = \quad \sum_{u:ut\in E} x_{ut} \;=\; 1$$



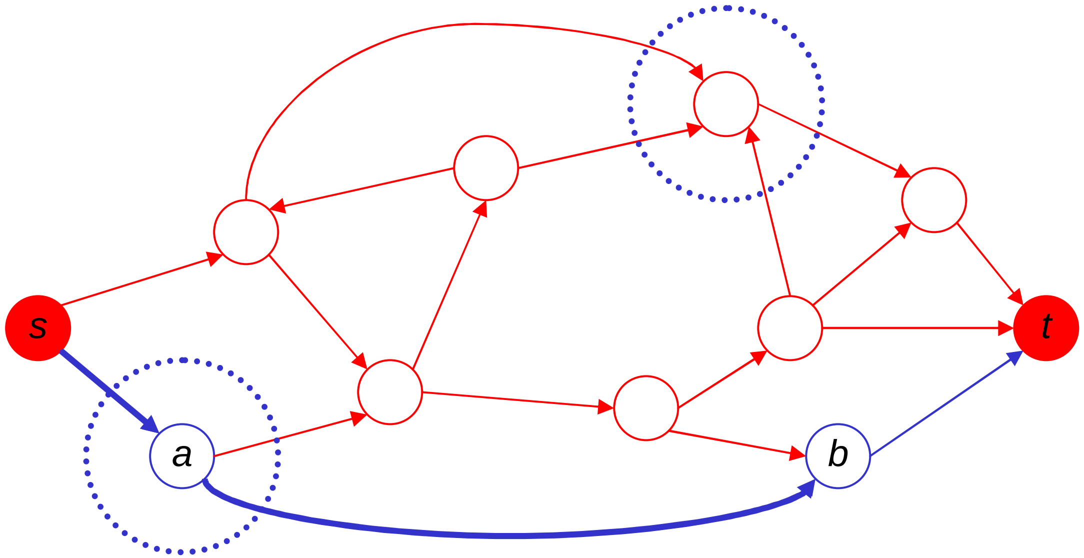
Formulazione come PL 0-1

Per $v \neq s, t$ se $v \in W$ vi sono esattamente un arco uscente e uno entrante nel nodo

$$\sum_{u:uv\in E} x_{uv} - \sum_{u:vu\in E} x_{vu} = 1 - 1 = 0$$

se $v \notin W$ nessun arco entra o esce dal nodo

$$\sum_{u:uv\in E} x_{uv} - \sum_{u:vu\in E} x_{vu} = 0 - 0 = 0$$



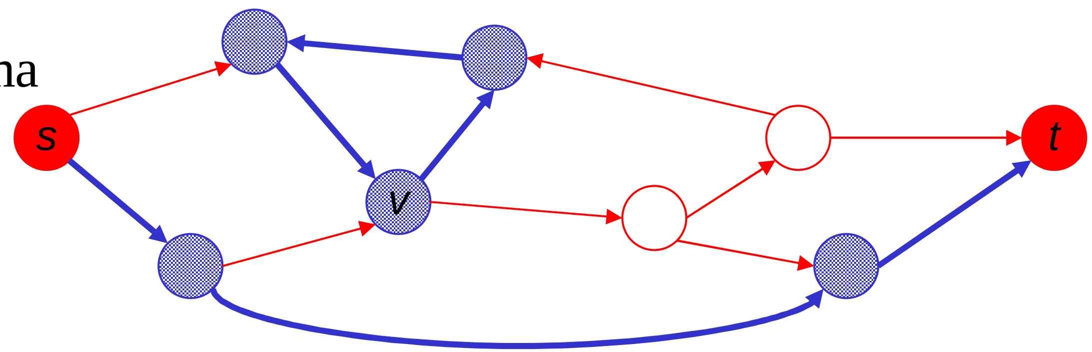
Formulazione come PL 0-1

In definitiva, ogni $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{|E|}$ che sia vettore caratteristico di un (s, t)-cammino dovrà verificare le condizioni

$$
(1) \qquad \begin{array}{lcll}
\sum_{u:uv\in E} x_{uv} - \sum_{u:vu\in E} x_{vu} & = & -1 & \text{per } v = s \\
\sum_{u:uv\in E} x_{uv} - \sum_{u:vu\in E} x_{vu} & = & +1 & \text{per } v = t \\
\sum_{u:uv\in E} x_{uv} - \sum_{u:vu\in E} x_{vu} & = & 0 & \text{per } v \neq s, t
\end{array}
$$

Viceversa, non è detto che tutti i gli $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{|E|}$ che verificano le condizioni (1) siano vettori caratteristici di (s, t)-cammini

In v la (1) è soddisfatta ma gli archi blu non formano un cammino



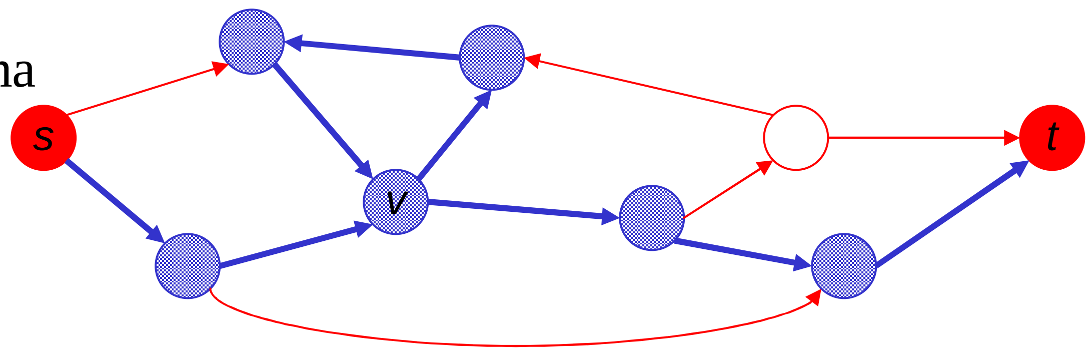
Formulazione come PL 0-1

In definitiva, ogni $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{|E|}$ che sia vettore caratteristico di un (s, t)-cammino dovrà verificare le condizioni

$$
(1) \qquad \begin{array}{lcl}
\sum_{u:uv\in E} x_{uv} - \sum_{u:vu\in E} x_{vu} & = & -1 \quad \text{per } v = s \\
\sum_{u:uv\in E} x_{uv} - \sum_{u:vu\in E} x_{vu} & = & +1 \quad \text{per } v = t \\
\sum_{u:uv\in E} x_{uv} - \sum_{u:vu\in E} x_{vu} & = & 0 \quad \text{per } v \neq s, t
\end{array}
$$

Viceversa, non è detto che tutti i gli $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{|E|}$ che verificano le condizioni (1) siano vettori caratteristici di (s, t)-cammini

In v la (1) è soddisfatta ma gli archi blu non formano un cammino



Formulazione come PL 0-1

Per capire com'è fatto l'insieme dei vettori 0-1 che soddisfano le condizioni

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
\textstyle\sum_{u:uv\in E} x_{uv} - \sum_{u:vu\in E} x_{vu} &= -1 \quad \text{per } v = s \\
\textstyle\sum_{u:uv\in E} x_{uv} - \sum_{u:vu\in E} x_{vu} &= +1 \quad \text{per } v = t \\
\textstyle\sum_{u:uv\in E} x_{uv} - \sum_{u:vu\in E} x_{vu} &= 0 \quad \text{per } v \neq s, t
\end{aligned}
$$

osserviamo che in forma matriciale queste si riscrivono

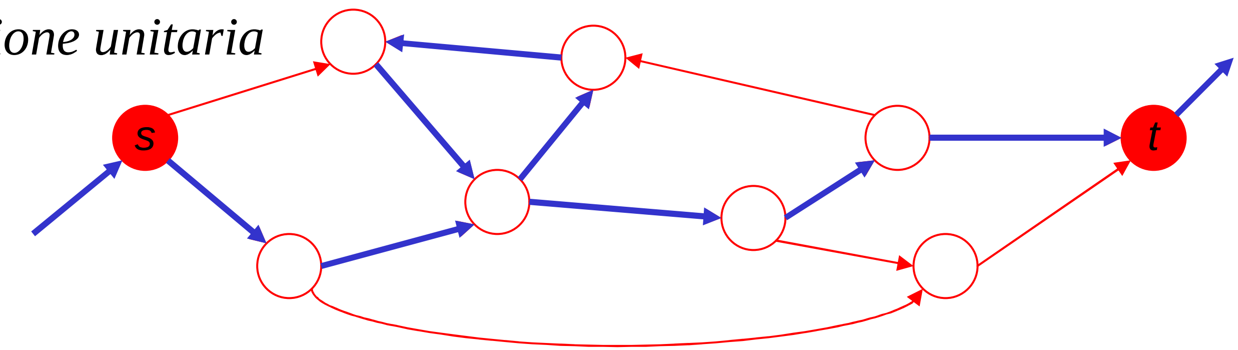
$$\mathbf{Gx} = \mathbf{e}_t - \mathbf{e}_s$$

cioè

$$\text{div}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_s - \mathbf{e}_t$$

$\mathbf{x}$ è dunque la distribuzione di un *flusso unitario* con divergenza 1 in s, –1 in t, e 0 altrove

Poiché però una *circolazione unitaria* $\mathbf{x}'$ ha divergenza nulla, $\mathbf{x} + \mathbf{x}'$ è ancora soluzione del problema



Formulazione come PL 0-1

In conclusione, le soluzioni del problema

$$\text{(P)} \qquad \min \quad \mathbf{cx}$$
$$\mathbf{Gx} = \mathbf{e}_t - \mathbf{e}_s$$
$$\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}, \text{ intero}$$

sono distribuzioni di flusso unitario con sorgente in *s* e pozzo in *t*

Come possiamo garantire che corrispondano a degli (s, t)-cammini?

1) Richiedendo che *G* sia privo di circuiti: in questo caso *G* non ammette circolazioni, oppure
2) Richiedendo che c_{uv} sia ≥ 0 per ogni $uv \in E$: in questo caso se $\mathbf{x} + \mathbf{x}'$ è ammissibile e ottima con $\mathbf{x}'$ circolazione, allora

$$\mathbf{x} \text{ è ammissibile e } \mathbf{cx} \leq \mathbf{c}(\mathbf{x} + \mathbf{x}')$$

dunque $\mathbf{x}$ è ammissibile e ottima

Formulazione come PL

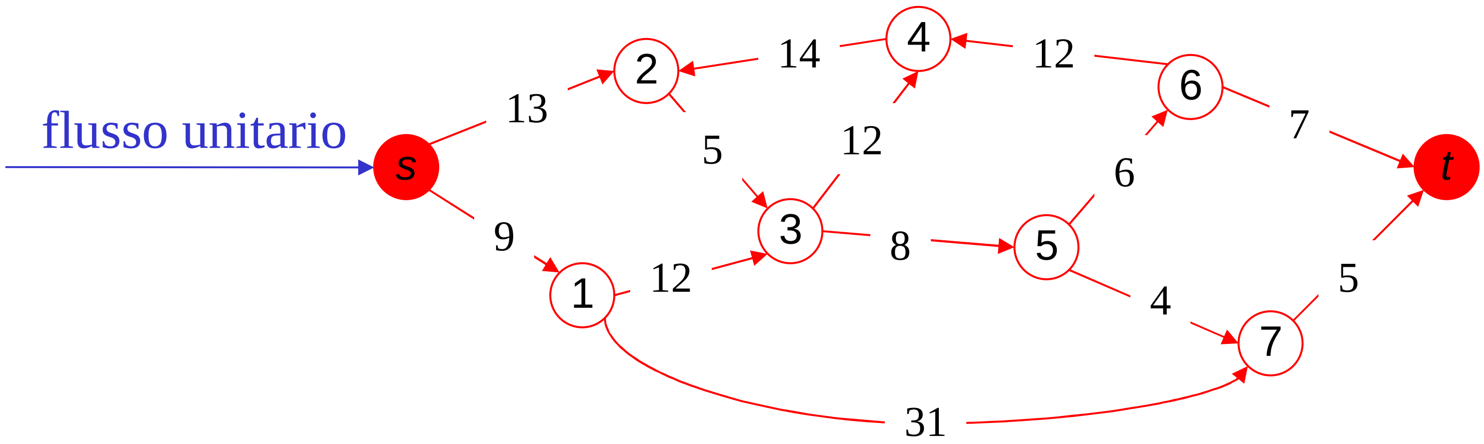
Se dunque si ha $c_{uv} \geq 0$ per ogni $uv \in E$, osservando che la matrice $\mathbf{G}$ è totalmente unimodulare e che il vettore $\mathbf{e}_t - \mathbf{e}_s$ è intero, si conclude che i vertici del rilassamento lineare di (P) sono tutti a componenti intere, dunque una soluzione ottima di base di

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{P_R}) & \min & \mathbf{cx} \\
 & & \mathbf{Gx} = \mathbf{e}_t - \mathbf{e}_s \\
 & & \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}
\end{array}
$$

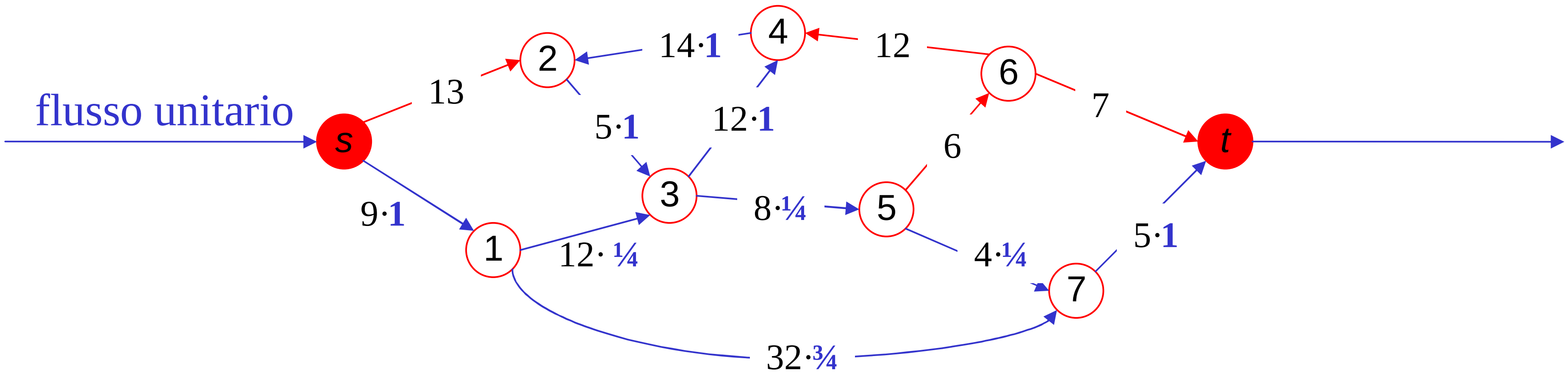
corrisponde a un (s, t)-cammino di peso minimo

E se $\mathbf{c} \not\geq \mathbf{0}$
e G contiene circuiti?

Esempio



Esempio

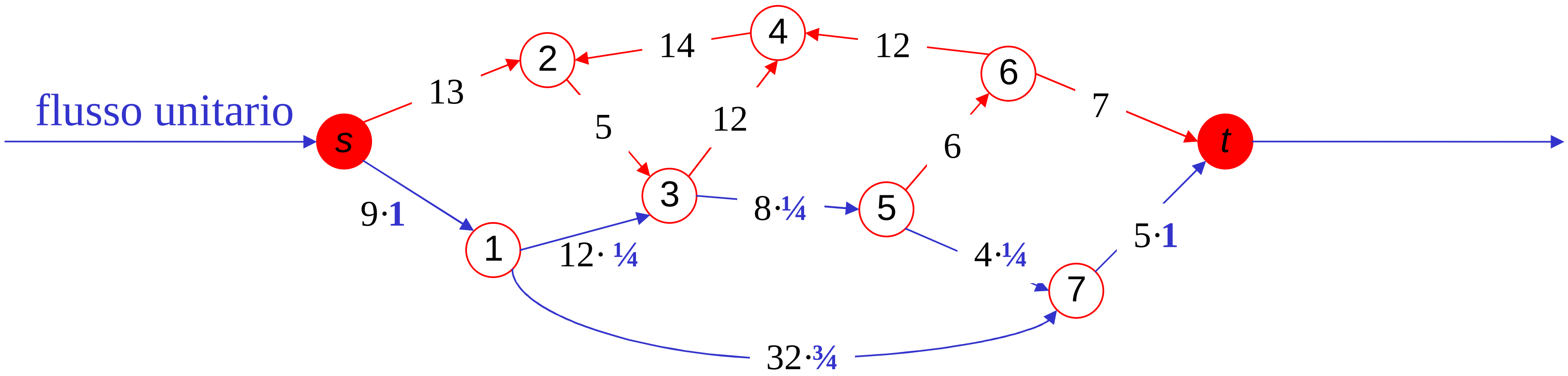


Costo della soluzione: **cx** = 9·1 + 5·1 + 12·1 + 14·1 + 12·¼ +

+ 8·¼ + 4·¼ + 32·¾ + 5·1 = **75**

Eliminando la circolazione sugli archi 23, 34, 42

Esempio



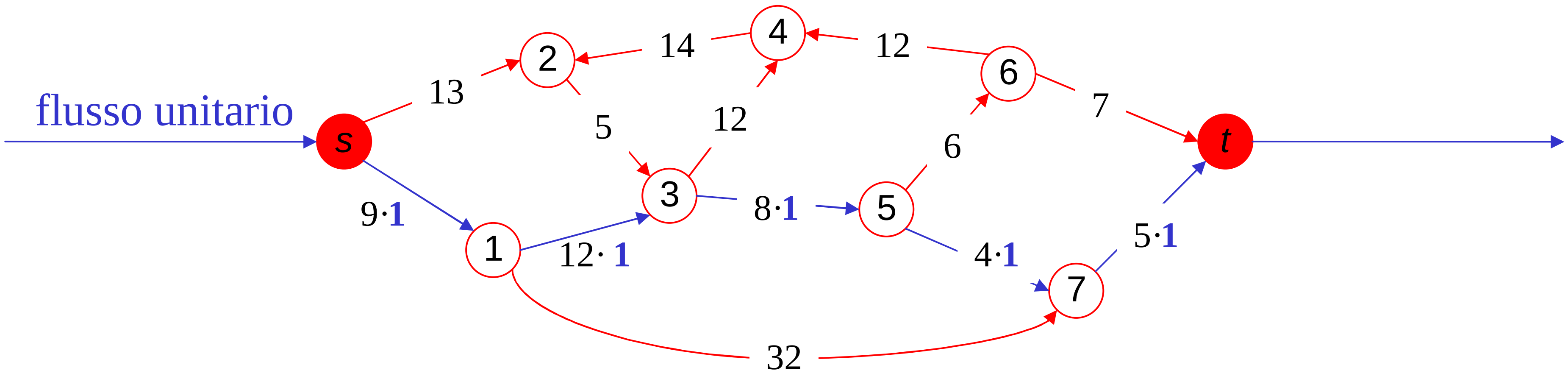
Costo della soluzione: **cx** = 9·1 + 5·0 + 12·0 + 14·0 + 12·¼ + + 8·¼ + 4·¼ + 32·¾ + 5·1 = 44

Eliminando la circolazione sugli archi 23, 34, 42

Un flusso unitario sul cammino 17 costa 32, mentre sul cammino 13, 35, 57 costa 12 + 8 + 4 = 24.

Spostando il flusso del primo cammino (¾) sul secondo

Esempio



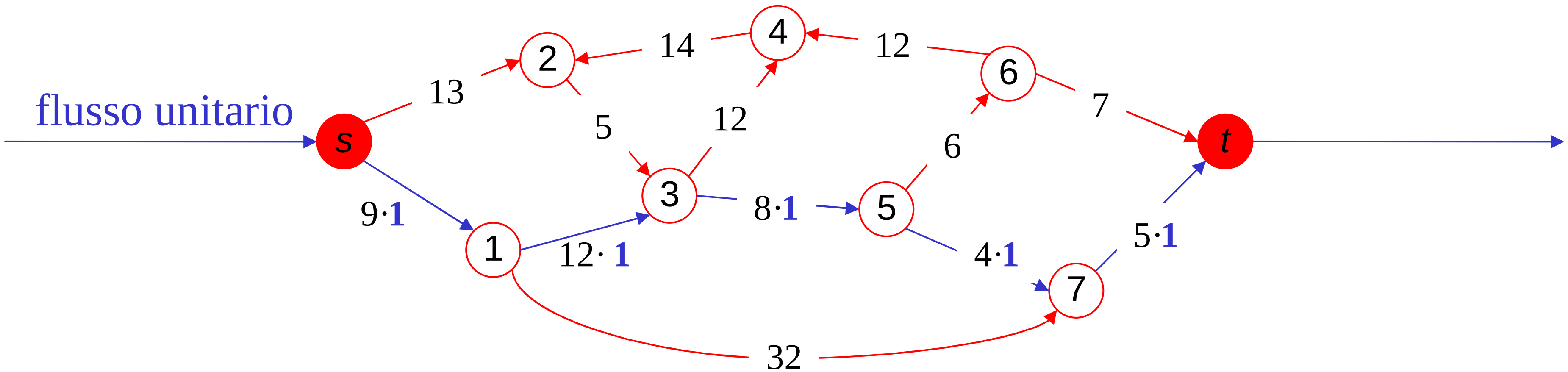
Costo della soluzione: **cx** = 9·1 + 5·0 + 12·0 + 14·0 + 12·1 + + 8·1 + 4·1 + 32·0 + 5·1 = **38**

Eliminando la circolazione sugli archi 23, 34, 42

Un flusso unitario sul cammino 17 costa 32, mentre sul cammino 13, 35, 57 costa 12 + 8 + 4 = 24.

Spostando il flusso del primo cammino (¾) sul secondo

Esempio



Esercizio 1 Consideriamo il rilassamento

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{cx} \\ & \mathbf{Gx} = \mathbf{e}_t - \mathbf{e}_s \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

nel quale si è rimosso il vincolo $\mathbf{x} \leq \mathbf{1}$. Supponendo $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$, esistono soluzioni ammissibili che assegnano flusso > 1 a qualche arco?
Può accadere che nessuna soluzione ottima rappresenti un (s, t)-cammino?

Risoluzione come PL

Per risolvere il problema dell'(s, t)-cammino minimo, oltre al noto

- metodo di Dijkstra

possiamo dunque ricorrere a un qualsiasi metodo di programmazione lineare, ad esempio

- al metodo del simplesso
- al metodo primale-duale

Vediamo cosa comporta l'applicazione del secondo metodo

Applicazione del Primale-Duale

Siano dati $G = (V, E)$ e $s, t \in V$ con $|V| = n$, $|E| = m$

Adottiamo per il problema primale la formulazione standard

$$(P) \qquad \min \quad \mathbf{cx}$$
$$\mathbf{Gx} = \mathbf{e}_t - \mathbf{e}_s$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \qquad \text{(vedi Esercizio 1)}$$

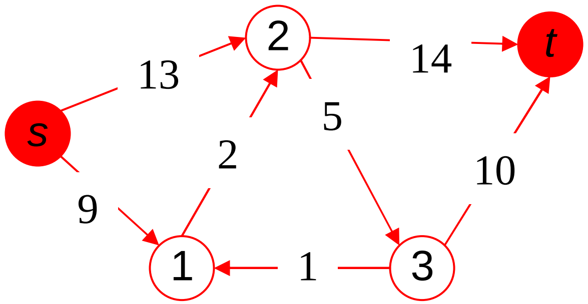
Poiché la matrice **G** ha rango $n - 1$ si può rimuovere una riga, ad esempio quella corrispondente al nodo s. Detta **G'** la matrice risultante, P si riscrive

$$(P) \qquad \min \quad \mathbf{cx}$$
$$\mathbf{G'x} = \mathbf{e}_t$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

e il duale è

$$(D) \qquad \max \quad \mathbf{ye}_t = y_t$$
$$\mathbf{yG} \leq \mathbf{c}$$

Applicazione del Primale-Duale



$$\begin{aligned}
\min \quad & 9x_{s1} + 13x_{s2} + 2x_{12} + 5x_{23} + 14x_{2t} + x_{31} + 10x_{3t} \\
& x_{s1} - x_{12} + x_{31} = 0 \\
& x_{s2} + x_{12} - x_{23} - x_{2t} = 0 \\
& x_{23} - x_{31} - x_{3t} = 0 \\
& x_{2t} + x_{3t} = 1 \qquad x_{uv} \geq 0 \ \forall uv \in E
\end{aligned}$$

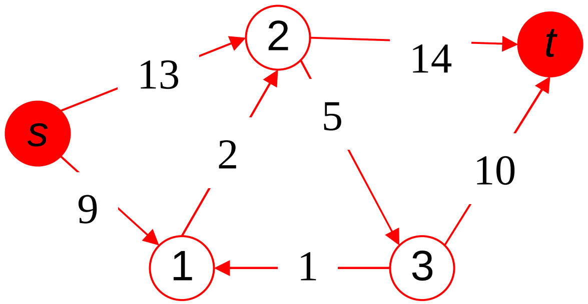
Poiché la matrice **G** ha rango $n - 1$ si può rimuovere una riga, ad esempio quella corrispondente al nodo s. Detta **G'** la matrice risultante, P si riscrive

$$\text{(P)} \qquad \min \quad \mathbf{cx} \qquad \mathbf{G'x} = \mathbf{e}_t \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

e il duale è

$$\text{(D)} \qquad \max \quad \mathbf{ye}_t = y_t \qquad \mathbf{yG'} \leq \mathbf{c} \qquad \text{con } \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_t)$$

Applicazione del Primale-Duale



$$\min \quad 9x_{s1} + 13x_{s2} + 2x_{12} + 5x_{23} + 14x_{2t} + x_{31} + 10x_{3t}$$
$$x_{s1} - x_{12} + x_{31} = 0$$
$$x_{s2} + x_{12} - x_{23} - x_{2t} = 0$$
$$x_{23} - x_{31} - x_{3t} = 0$$
$$x_{2t} + x_{3t} = 1 \qquad x_{uv} \geq 0 \ \forall uv \in E$$

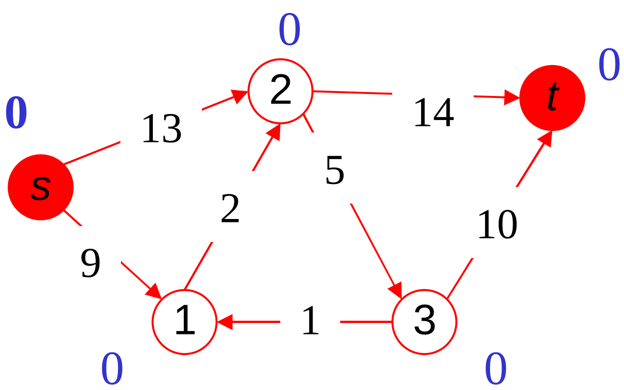
In dettaglio il duale si scrive

(D) $\quad \max \quad y_t$

$$y_v - y_u \leq c_{uv} \qquad \forall uv \in E$$

dove si assume $y_s = 0$

Applicazione del Primale-Duale



$$
\begin{array}{llll}
\max & y_t & & \\
 & y_1 \le 9, & y_2 \le 13 & y_2 - y_1 \le 2 \\
 & y_1 - y_3 \le 1 & y_3 - y_2 \le 5 & y_t - y_2 \le 14 \\
 & y_t - y_3 \le 10 & &
\end{array}
$$

In dettaglio il duale si scrive

(D) $\max \quad y_t$

$y_v - y_u \le c_{uv} \qquad \forall uv \in E$

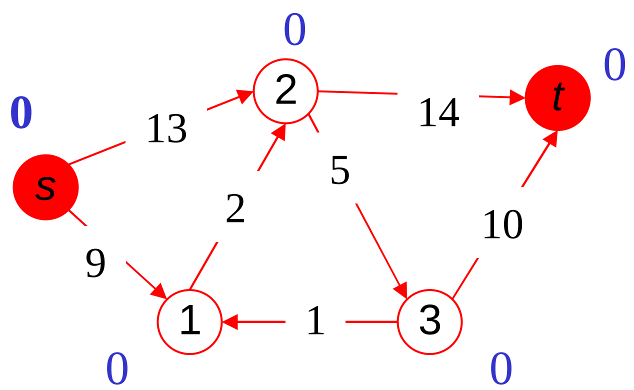
dove si assume $y_s = 0$

Osserviamo che siccome $c_{uv} \ge 0$, $y_u° = 0$ $\forall u \in V$ è una soluzione ammissibile.

A partire da questa costruiamo gli insiemi $Z_0 = \{uv \in E: y_v° - y_u° = c_{uv}\}$

$N_0 = \{uv \in E: y_v° - y_u° < c_{uv}\}$

Applicazione del Primale-Duale



$Z_0 = \varnothing$
$N_0 = E$

In dettaglio il duale si scrive

(D) $\quad \max \quad y_t$

$\qquad\qquad y_v - y_u \leq c_{uv} \qquad \forall uv \in E$

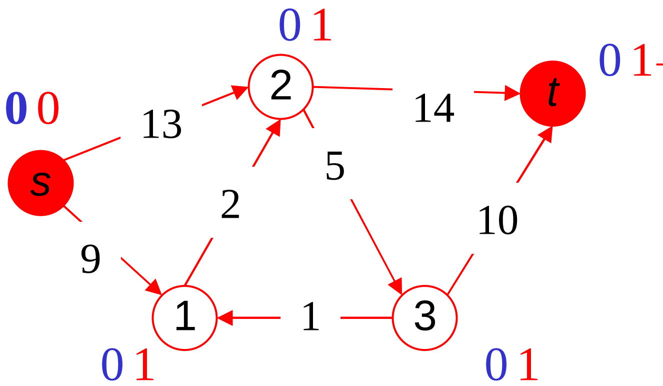
dove si assume $y_s = 0$

Osserviamo che siccome $c_{uv} \geq 0$, $y_u° = 0$ $\forall u \in V$ è una soluzione ammissibile.

A partire da questa costruiamo gli insiemi $\quad Z_0 = \{uv \in E: y_v° - y_u° = c_{uv}\}$

$N_0 = \{uv \in E: y_v° - y_u° < c_{uv}\}$

Applicazione del Primale-Duale



$$Z_0 = \varnothing$$
$$N_0 = E$$

DR$_0$) max y_t

$y_u \leq 1 \quad \forall u \in V - \{s\}$

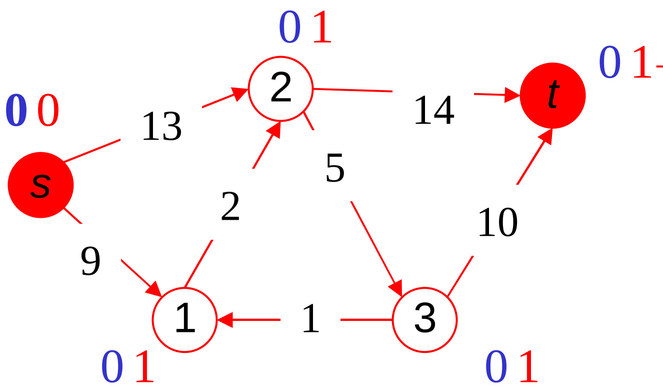
$\boxed{y_t^* = 1}$

Scriviamo ora il duale ridotto associato a $\mathbf{y}°$

$$(\mathrm{DR}_0) \qquad \max \; y_t$$
$$y_u \leq 1 \qquad \forall u \in V - \{s\}$$
$$y_v - y_u \leq 0 \qquad \forall uv \in Z_0$$

Se la soluzione ottima $\mathbf{y}^*$ di DR$_0$ ha valore 0 (cioè se $y_t^* = 0$), allora $\mathbf{y}°$ è ottima.
Altrimenti (cioè se $y_t^* > 0$) occorre alterare $\mathbf{y}°$ di un termine $\theta^*\mathbf{y}^*$.

Applicazione del Primale-Duale



$$Z_0 = \varnothing \qquad N_0 = E$$

$$\text{DR}_0) \quad \max \quad y_t$$
$$y_u \leq 1 \quad \forall u \in V - \{s\}$$

$$\boxed{y_t^* = 1}$$

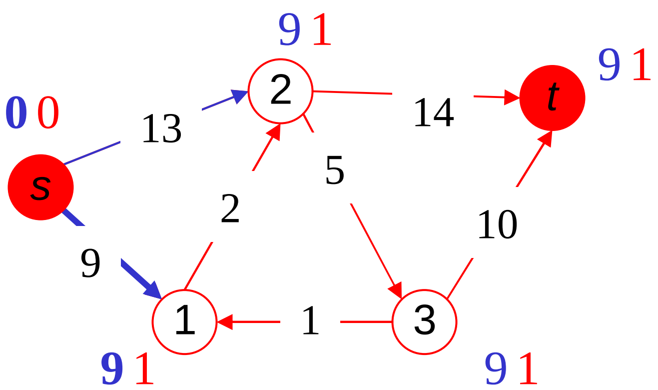
Si ha $\theta^* = \min_{uv \in J_0} \{ \dfrac{c_{uv} - \mathbf{y}° \cdot \mathbf{G}_{uv}}{\mathbf{y}^* \cdot \mathbf{G}_{uv}} \} = \min_{uv \in J_0} \{ \dfrac{c_{uv} - y_v° + y_u°}{y_v^* - y_u^*} \}$

dove $J_0 = \{uv \in N_0 : y_v^* - y_u^* > 0\}$, e siccome per $uv \in N_0$ si ha $y_v^* - y_u^* = 1$

$$\theta^* = \min_{uv \in J_0} \{ c_{uv} - y_v° + y_u° \}$$

Se la soluzione ottima $\mathbf{y}^*$ di DR_0 ha valore 0 (cioè se $y_t^* = 0$), allora $\mathbf{y}°$ è ottima. Altrimenti (cioè se $y_t^* > 0$) occorre alterare $\mathbf{y}°$ di un termine $\theta^* \mathbf{y}^*$.

Applicazione del Primale-Duale



$Z_0 = \varnothing$ $\qquad\theta^* = \min\{9 - 0 + 0,\ 13 - 0 + 0\} = 9$

$N_0 = E$

$J_0 = \{s1, s2\}$ $\qquad\mathbf{y}^1 = \mathbf{y}° + 9\mathbf{y}^*$

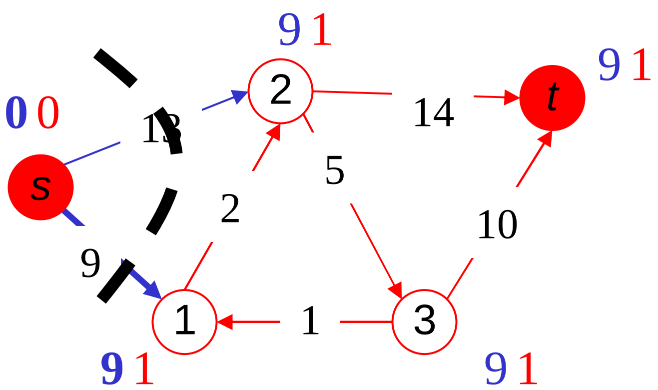
Si ha $\theta^* = \min_{uv\in J_0}\{\dfrac{c_{uv} - \mathbf{y}°\cdot\mathbf{G}_{uv}}{\mathbf{y}^*\cdot\mathbf{G}_{uv}}\} = \min_{uv\in J_0}\{\dfrac{c_{uv} - y_v° + y_u°}{y_v^* - y_u^*}\}$

dove $J_0 = \{uv \in N_0 : y_v^* - y_u^* > 0\}$, e siccome per $uv \in N_0$ si ha $y_v^* - y_u^* = 1$

$$\theta^* = \min_{uv\in J_0}\{c_{uv} - y_v° + y_u°\}$$

Se la soluzione ottima $\mathbf{y}^*$ di DR$_0$ ha valore 0 (cioè se $y_t^* = 0$), allora $\mathbf{y}°$ è ottima. Altrimenti (cioè se $y_t^* > 0$) occorre alterare $\mathbf{y}°$ di un termine $\theta^*\mathbf{y}^*$.

Applicazione del Primale-Duale



$Z_0 = \varnothing$
$N_0 = E$
$J_0 = \{s1, s2\}$

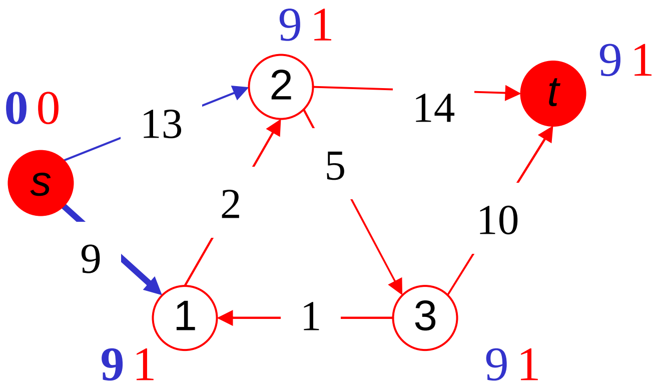
Osserviamo che l'insieme J_0 contiene tutti gli archi *uv* di *G* diretti da nodi con potenziale $y_u^* = 0$ a nodi con potenziale $y_v^* = 1$.
In altri termini:
il vettore **y*** dei potenziali ridotti divide *V* in due insiemi di nodi:

S = nodi a potenziale ridotto 0

T = nodi a potenziale ridotto 1

e l'insieme J_0 è formato dagli archi del taglio (archi blu) associato a questa partizione che sono diretti da *S* a *T*.

Applicazione del Primale-Duale



$Z_1 = \{s1\}$

$N_1 = E - \{s1\}$

DR$_1$) max y_t

$y_u \leq 1 \quad \forall u \in V - \{s\}$

$y_1 - y_s \leq 0$

A partire dalla nuova soluzione $\mathbf{y}^1$ si costruiscono i due insiemi

$$Z_1 = \{uv \in E: y_v^1 - y_u^1 = c_{uv}\}$$
$$N_1 = \{uv \in E: y_v^1 - y_u^1 < c_{uv}\}$$

archi di J_0 in corrispondenza ai quali si è calcolato θ^*

e il duale ridotto

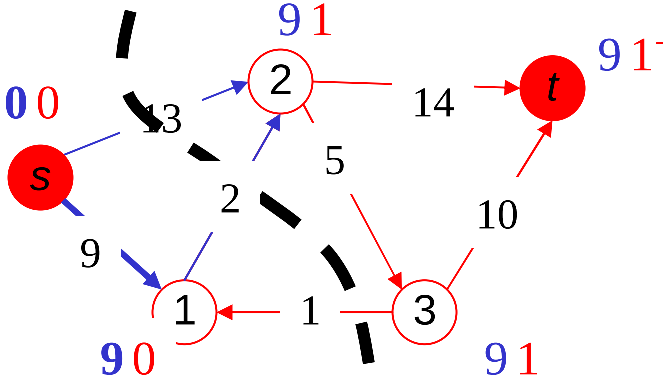
(DR$_1$) max y_t

$y_u \leq 1 \qquad \forall u \in V - \{s\}$

$y_v - y_u \leq 0 \qquad \forall uv \in Z_1$

Poi si procede al calcolo di una soluzione ottima $\mathbf{y}^*$ per DR$_1$.

Applicazione del Primale-Duale



$$Z_1 = \{s1\}$$
$$N_1 = E - \{s1\}$$
$$J_1 = \{s2,\ 12\}$$

$$\text{DR}_1) \quad \max \quad y_t$$
$$y_u \leq 1 \quad \forall u \in V - \{s\}$$
$$y_1 \leq y_s = 0$$

$$\boxed{y_t^* = 1}$$

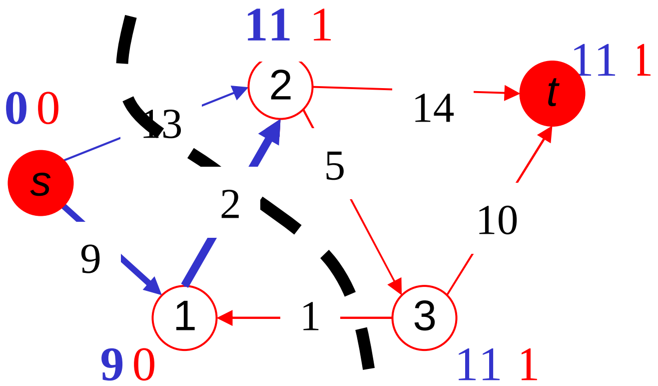
Osserviamo che se un nodo v è raggiungibile da s attraverso un arco di Z_1, il suo potenziale ridotto y_v^* non potrà superare 0.

Perciò una soluzione ottima di DR_k avrà valore $y_t^* = 1$ fin tanto che il nodo t non sarà raggiungibile da s usando archi di Z_k.

La nuova partizione S, T di V individua il nuovo taglio J_1.

Di qui si procede per il calcolo di $\theta^* = \min_{uv \in J_1}\{c_{uv} - y_v^1 + y_u^1\}$

Applicazione del Primale-Duale



$Z_1 = \{s1\}$ $\theta^* = \min\{13 - 9 + 0, 2 - 9 + 9\} = 2$

$N_1 = E - \{s1\}$

$J_1 = \{s2, 12\}$ $\mathbf{y}^2 = \mathbf{y}^1 + 2\mathbf{y}^*$

Osserviamo che se un nodo v è raggiungibile da s attraverso un arco di Z_1, il suo potenziale ridotto y_v^* non potrà superare 0.

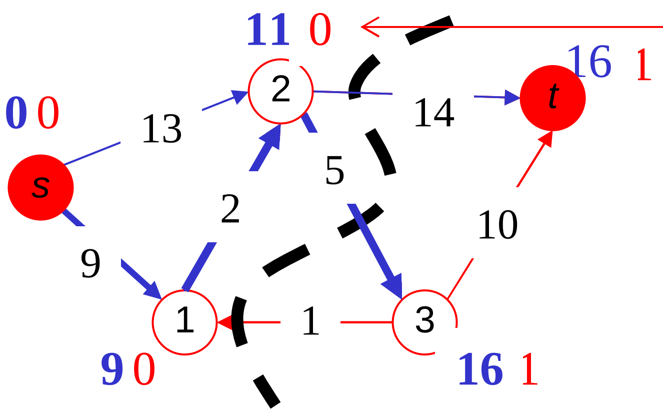
Perciò una soluzione ottima di DR$_k$ avrà valore $y_t^* = 1$ fin tanto che il nodo t non sarà raggiungibile da s usando archi di Z_k.

La nuova partizione S, T di V individua il nuovo taglio J_1.

Di qui si procede per il calcolo di $\theta^* = \min_{uv \in J_1}\{c_{uv} - y_v^{\,1} + y_u^{\,1}\}$

Notiamo che il potenziale $y_u^{\,1}$ dei nodi di S (cioè dei nodi a potenziale ridotto 0) non viene alterato. Questo potenziale rappresenta la <u>distanza minima</u> di u da s.

Applicazione del Primale-Duale



$Z_2 \;=\; \{s1,\, 12\}$

$N_2 \;=\; E - \{s1,\, 12\}$

$J_2 \;=\; \{23,\, 2t\}$

DR$_2$) $\quad \max \quad y_t$

$y_u \leq 1 \;\forall u \in V - \{s\}$

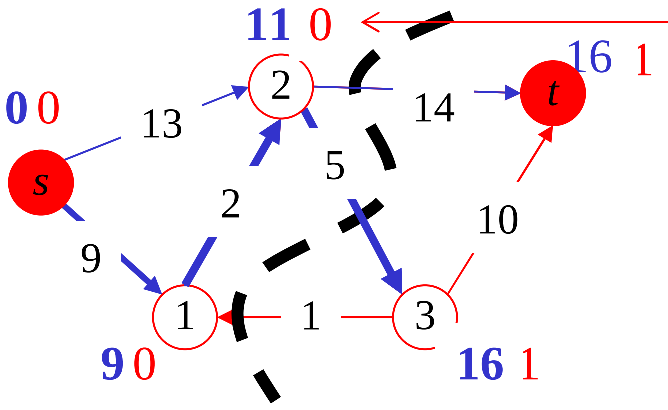
$y_1 \leq y_s = 0$

$y_2 \leq y_1$

$\theta^* \;=\; \min\{5 - 11 + 11,\, 14 - 11 + 11\} \;=\; 5$

$\mathbf{y}^3 = (0,\, 9,\, 11,\, 11,\, 11) + 5 \cdot (0,\, 0,\, 0,\, 1,\, 1)$

Applicazione del Primale-Duale



$Z_2 = \{s1, 12\}$

$N_2 = E - \{s1, 12\}$

$J_2 = \{23, 2t\}$

DR$_2$) max y_t

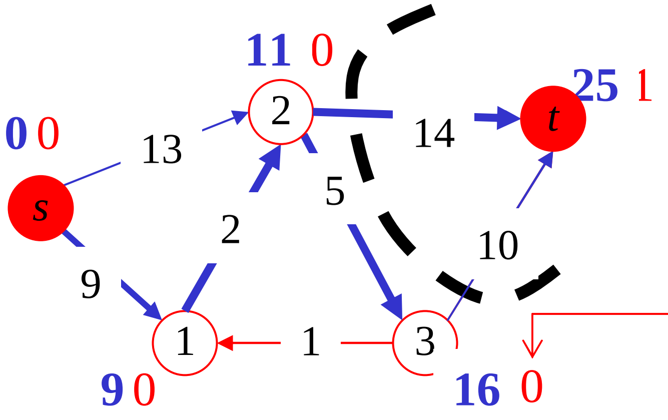
$y_u \leq 1 \ \forall u \in V - \{s\}$

$y_1 \leq y_s = 0$

$y_2 \leq y_1$

$\theta^* = \min\{5 - 11 + 11, 14 - 11 + 11\} = 5$

$\mathbf{y}^3 = (0, 9, 11, 11, 11) + 5 \cdot (0, 0, 0, 1, 1)$



$Z_3 = \{s1, 12, 23\}$

$N_3 = E - \{s1, 12, 23\}$

$J_3 = \{2t, 3t\}$

DR$_3$) max y_t

$y_u \leq 1 \ \forall u \in V - \{s\}$

$y_1 \leq y_s = 0$

$y_2 \leq y_1$

$y_3 \leq y_2$

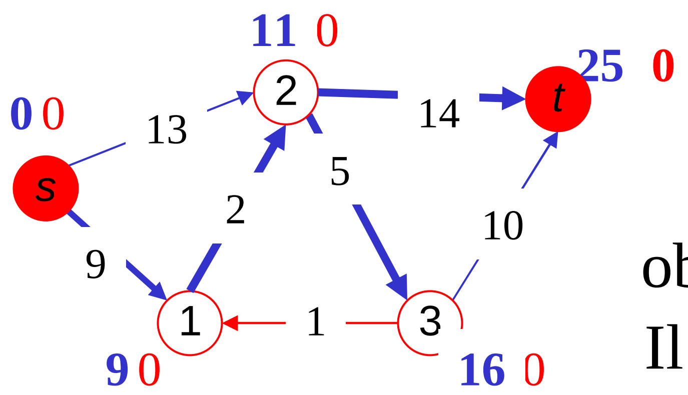
$\theta^* = \min\{14 - 16 + 11, 10 - 16 + 16\} = 9$

$\mathbf{y}^4 = (0, 9, 11, 16, 16) + 5 \cdot (0, 0, 0, 1, 1)$

Applicazione del Primale-Duale

A questo stadio della computazione si ha $Z_4 = \{s1, 12, 23, 2t\}$.
Gli archi di Z_4 (blu a tratto grosso) individuano un <u>albero dei cammini minimi</u> dal nodo s a tutti gli altri nodi di G.
In altri termini, il nodo t è raggiungibile da s attraverso archi di Z_4, per cui il duale ridotto DR$_4$) max y_t

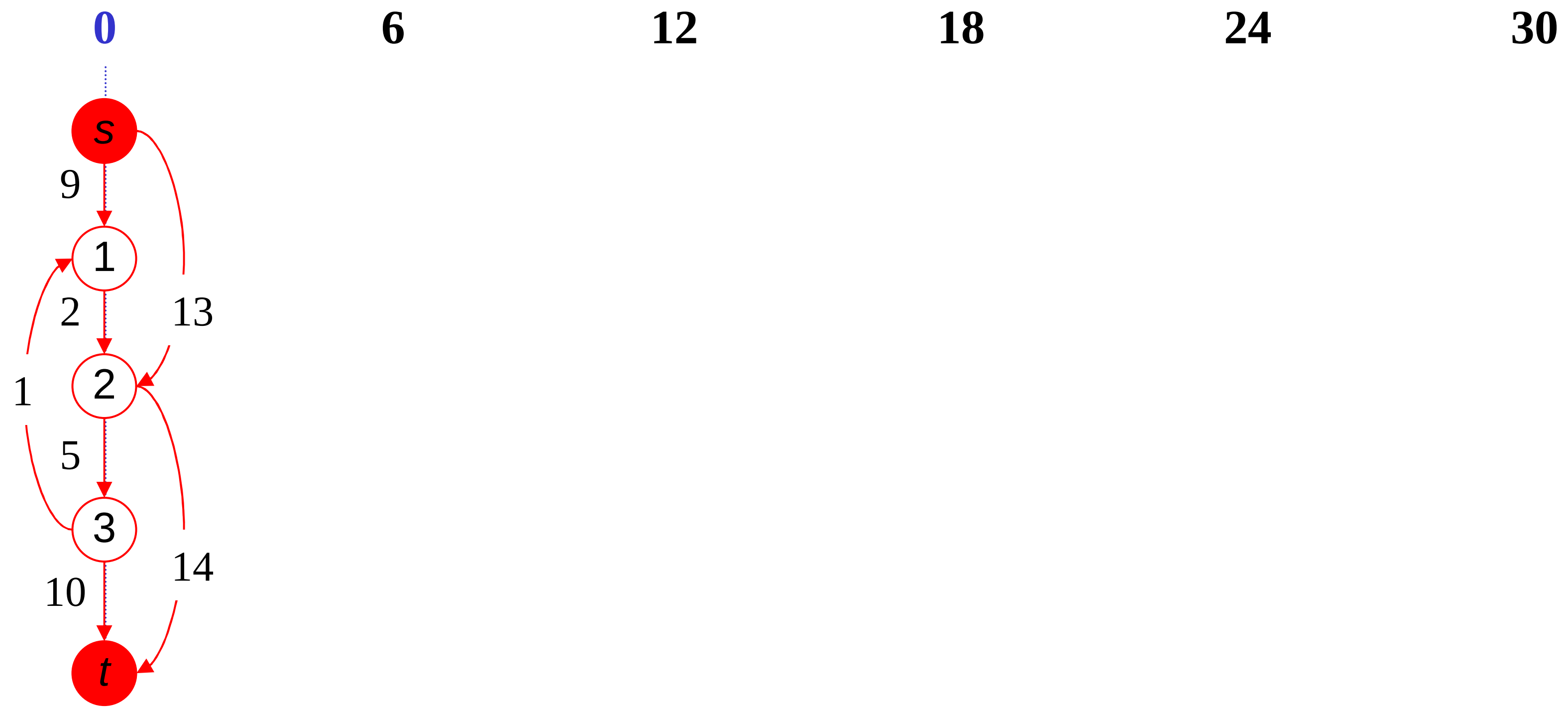
$$
\begin{aligned}
& y_u \leq 1 \qquad \forall u \in V - \{s\} \\
& y_1 \leq y_s = 0 \\
& y_2 \leq y_1 \\
& y_3 \leq y_2 \\
& y_t \leq y_2
\end{aligned}
$$



obbliga a porre $y_t^* = 0$.
Il metodo primale-duale si arresta e la soluzione corrente $\mathbf{y}^4$ è ottima.

Considerazioni riepilogative

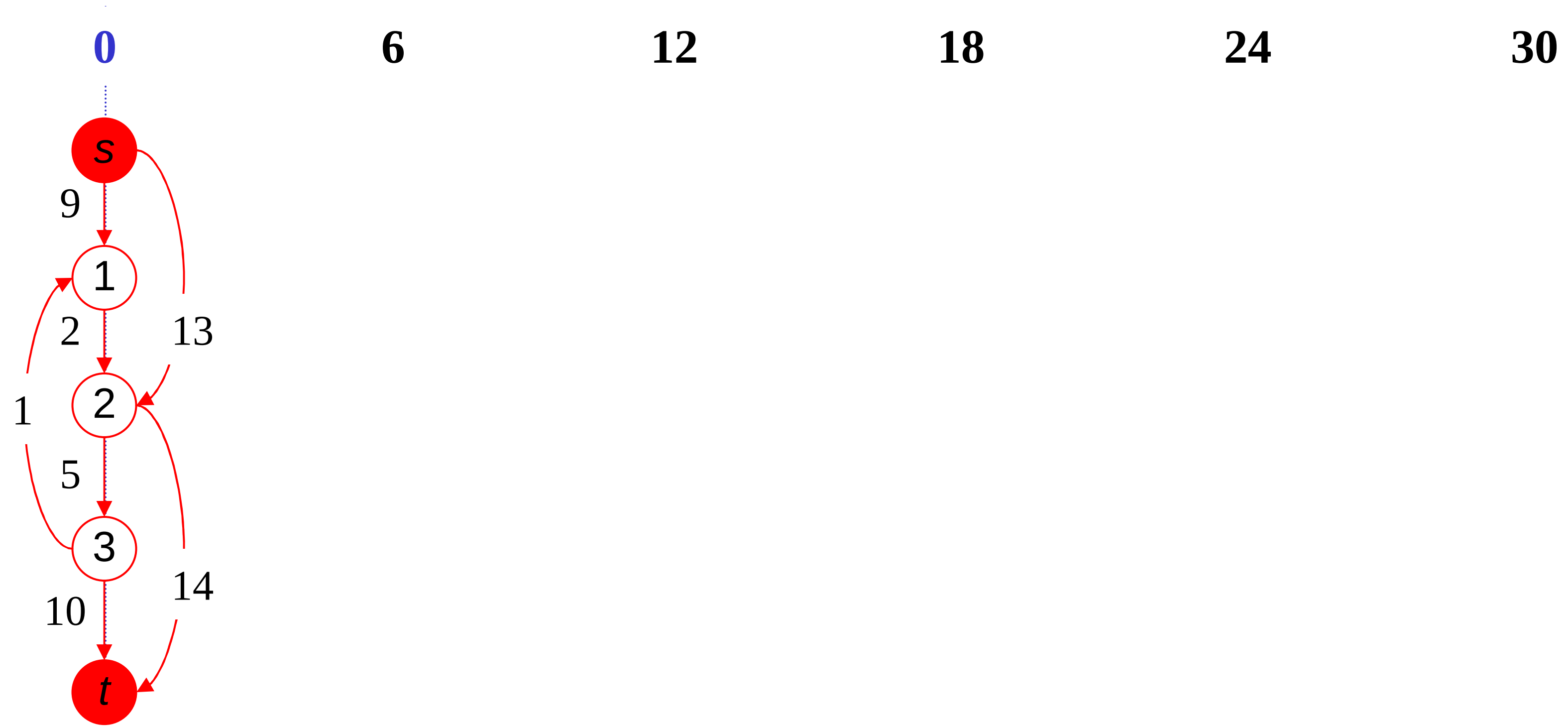
Il metodo primale-duale applicato al problema dell'(s, t)-cammino minimo si comporta sostanzialmente simulando una trazione di un modello fisico inestensibile del grafo operata sui nodi s e t



Inizialmente si dispongono i nodi di G su una linea a potenziale 0

Considerazioni riepilogative

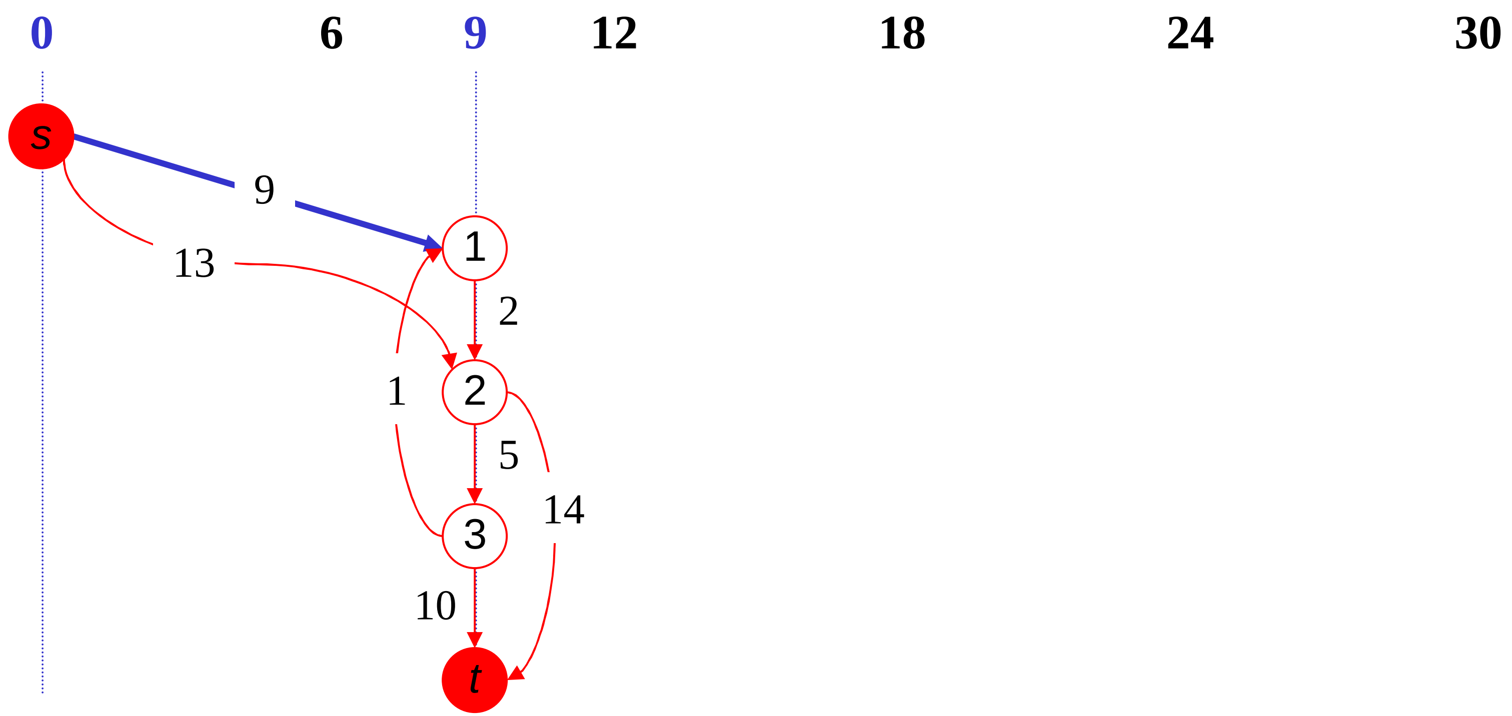
Il metodo primale-duale applicato al problema dell'(s, t)-cammino minimo si comporta sostanzialmente simulando una trazione di un modello fisico inestensibile del grafo operata sui nodi s e t



Successivamente si estende il grafo portando i nodi a distanza θ^*

Considerazioni riepilogative

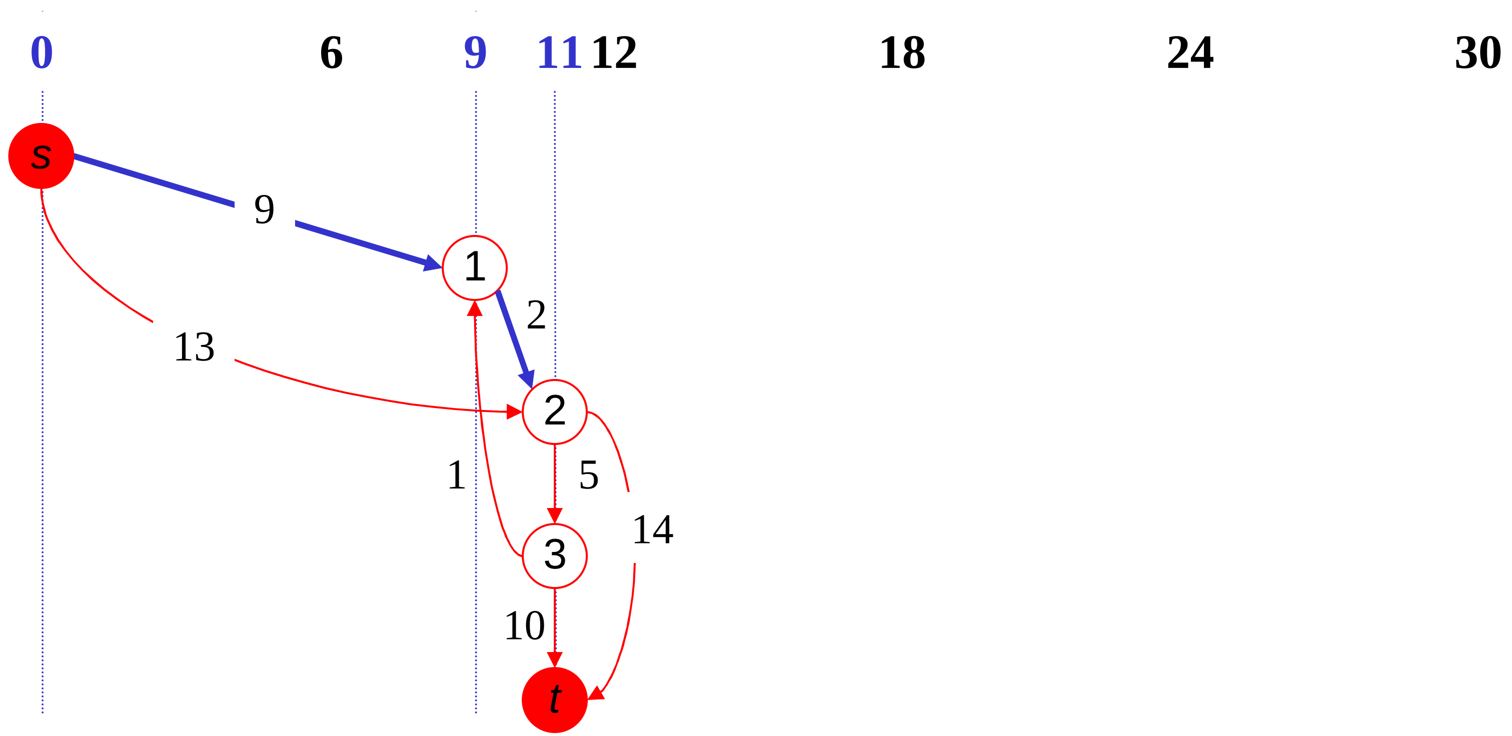
Il metodo primale-duale applicato al problema dell'(*s*, *t*)-cammino minimo si comporta sostanzialmente simulando una trazione di un modello fisico inestensibile del grafo operata sui nodi *s* e *t*



Successivamente si estende il grafo portando i nodi a distanza θ^*

Considerazioni riepilogative

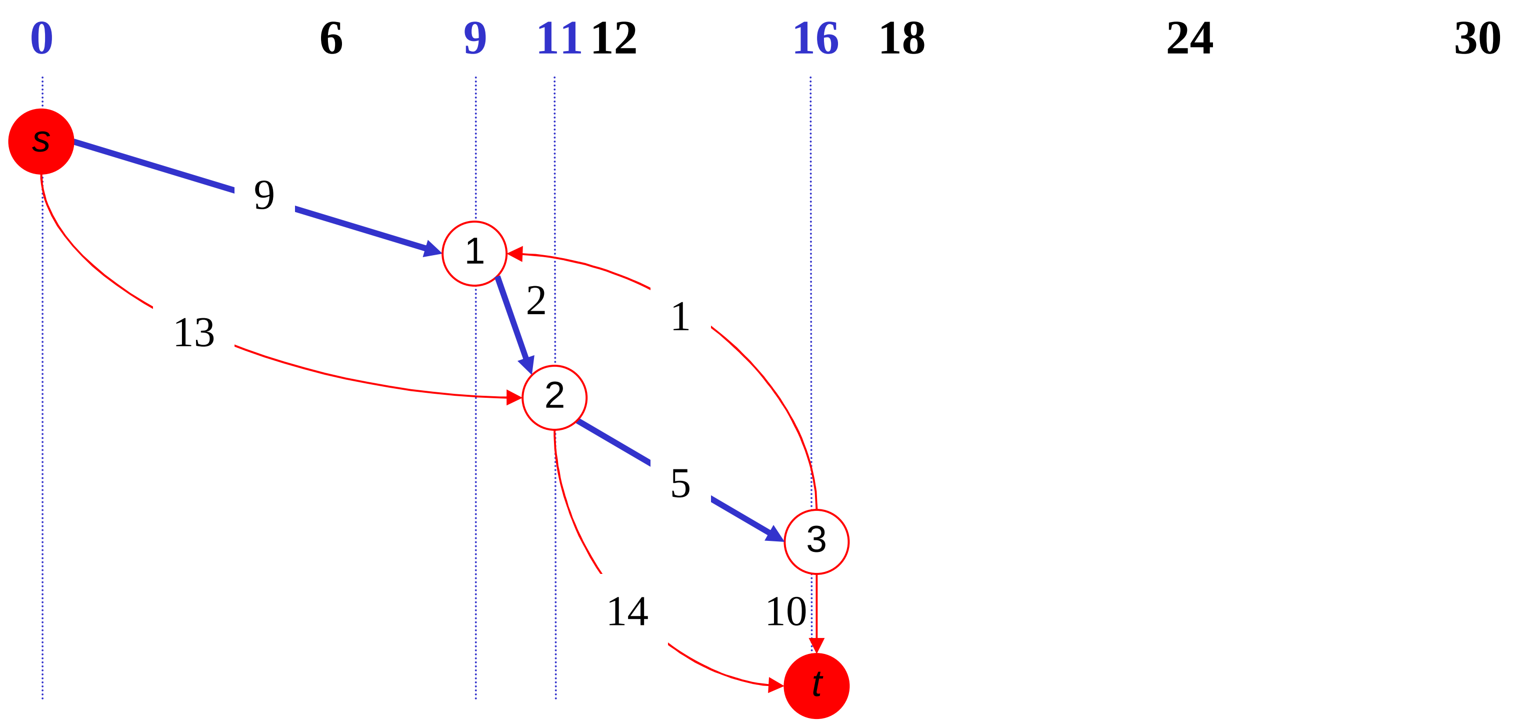
Il metodo primale-duale applicato al problema dell'(s, t)-cammino minimo si comporta sostanzialmente simulando una trazione di un modello fisico inestensibile del grafo operata sui nodi s e t



Successivamente si estende il grafo portando i nodi a distanza θ^*

Considerazioni riepilogative

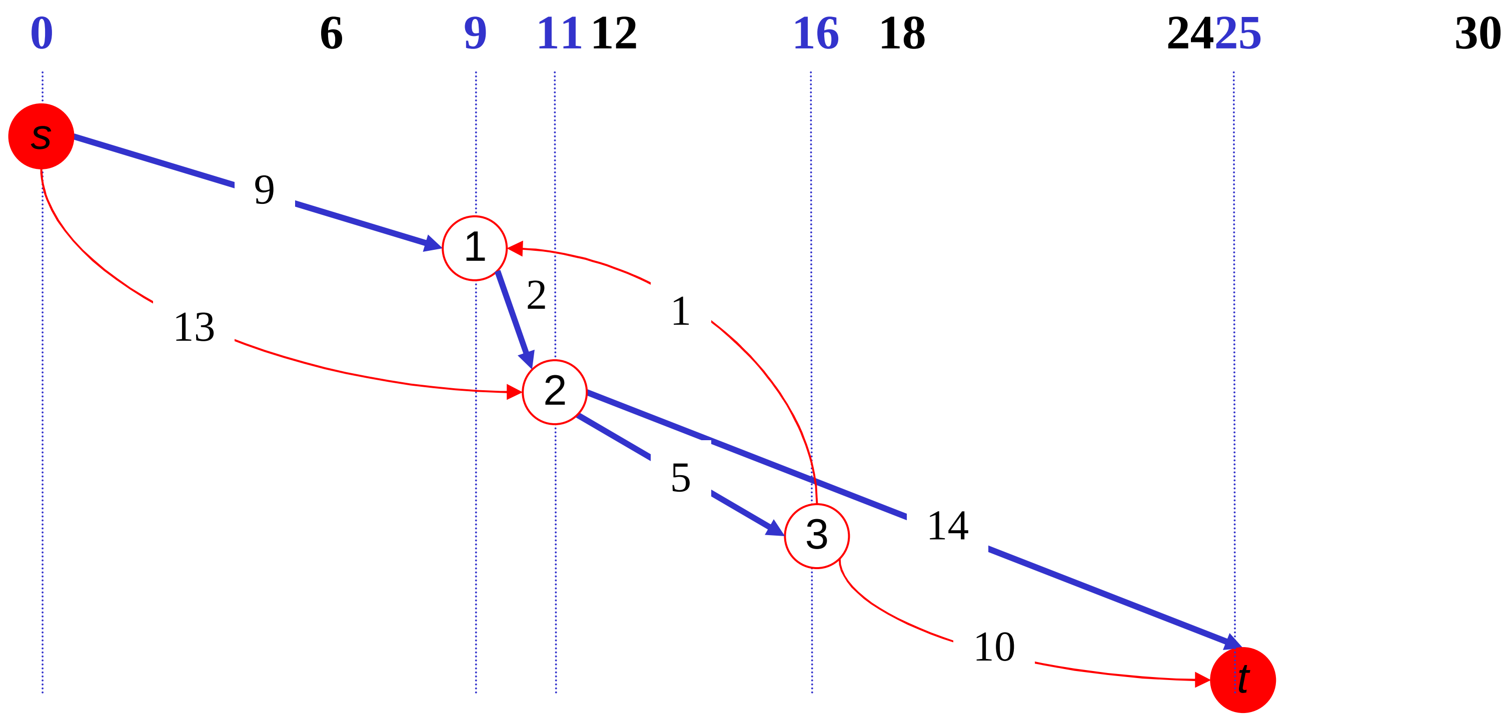
Il metodo primale-duale applicato al problema dell'(*s*, *t*)-cammino minimo si comporta sostanzialmente simulando una trazione di un modello fisico inestensibile del grafo operata sui nodi *s* e *t*



Successivamente si estende il grafo portando i nodi a distanza θ^*

Considerazioni riepilogative

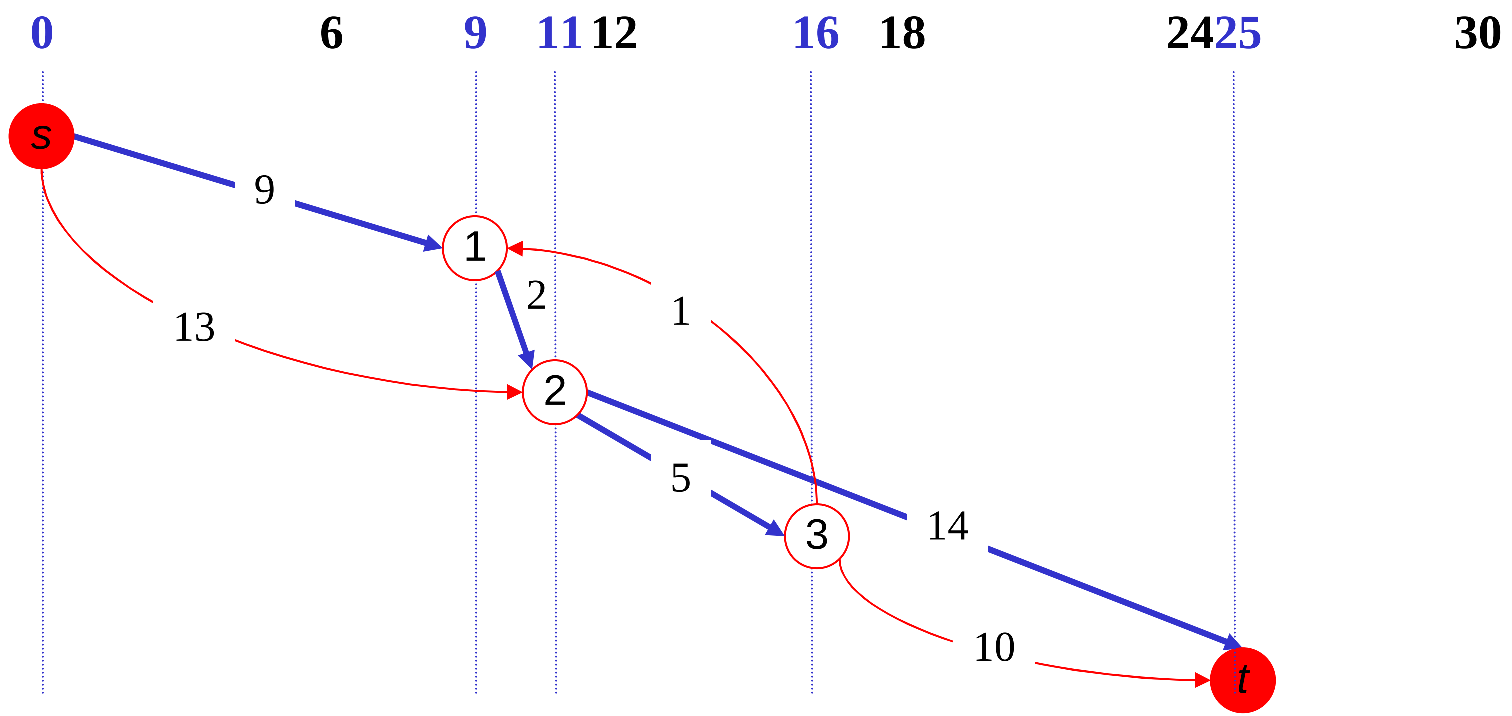
Il metodo primale-duale applicato al problema dell'(*s*, *t*)-cammino minimo si comporta sostanzialmente simulando una trazione di un modello fisico inestensibile del grafo operata sui nodi *s* e *t*



Successivamente si estende il grafo portando i nodi a distanza θ^*

Considerazioni riepilogative

Il metodo primale-duale applicato al problema dell'(s, t)-cammino minimo si comporta sostanzialmente simulando una trazione di un modello fisico inestensibile del grafo operata sui nodi s e t



Esercizio 2 Confrontare il metodo primale-duale con quello di Dijkstra