

Ottimizzazione Combinatoria 2  
A. A. 2007/2008  
Dispense del Prof. Smriglio

+

+

## Prerequisiti

- Fondamenti teorici della Programmazione Lineare (PL),
- teoremi dell'alternativa, dualità nella PL;
- Metodo del simplesso, implementazione “Tableau”;
- Algoritmo branch-and-bound;
- problema del cammino minimo;
- problema del minimo taglio;

+

+

+

## Indipendenza lineare ed affine

- un vettore  $y \in \mathbb{R}^n$  è combinazione lineare dei vettori  $\{x^1, \dots, x^k\}$  se esistono  $k$  moltiplicatori reali  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  tali che  $y = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$ . Una combinazione lineare con  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, k$  è detta *conica*. Una combinazione lineare con  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  si dice *affine*. Una combinazione conica ed affine si dice *convessa*
- Un sottoinsieme  $X \subset \mathbb{R}^n$  si dice *linearmente (affinementemente) indipendente* se nessun vettore di  $X$  può essere espresso come combinazione lineare (affine) degli altri.

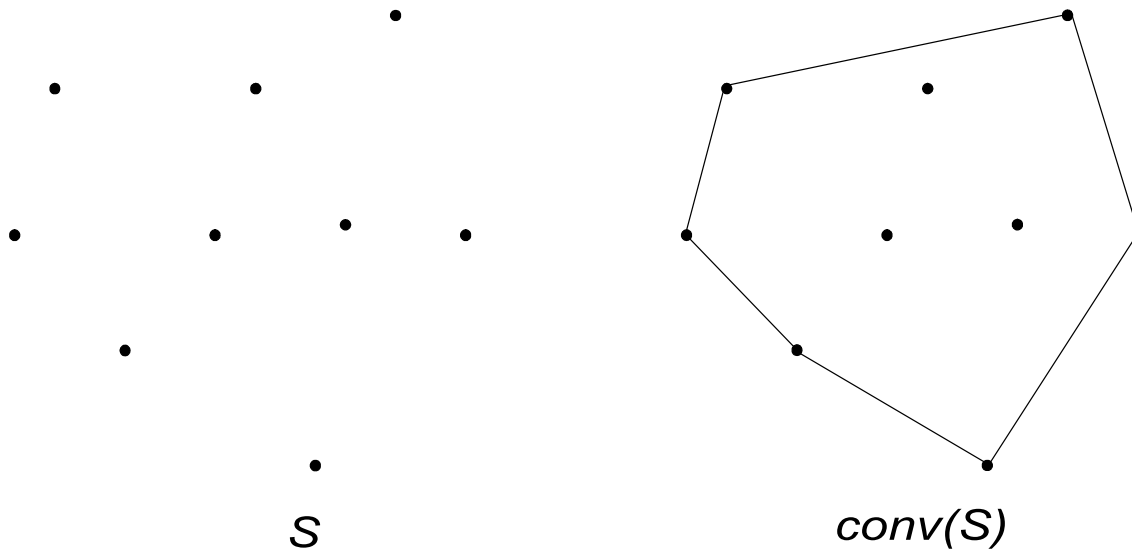
+

+

+

## Involucro convesso

Dato un insieme  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , l'*inviluppo convesso* (conico)  $conv(S)$  ( $cone(S)$ ) di  $S$  è l'insieme di tutti i vettori ottenibili per combinazione convessa di sottoinsiemi finiti di vettori di  $S$ .



- Un insieme  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  è convesso se e solo se  $X = conv(X)$ ;  $conv(S)$  è il più piccolo insieme convesso che contiene  $S$

+

+

+

## Ottimizzare su $\text{conv}(S)$

**Proposizione 1** Sia  $S = \{x^1, \dots, x^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme finito e sia  $w \in \mathbb{R}^n$ . Allora,  $\max\{w^T x : x \in S\} = \max\{w^T y : y \in \text{conv}(S)\}$

*Dimostrazione.* Sia  $y = \lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_k x^k$ , con  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  moltiplicatori non negativi tali che  $\sum_{i=1, \dots, k} \lambda_i = 1$ . Sia inoltre  $r = \operatorname{argmax}_{i=1, \dots, k} (w^T x^i)$ . Allora,

$$w^T y = \lambda_1 w^T x^1 + \dots + \lambda_k w^T x^k \leq \lambda_1 w^T x^r + \dots + \lambda_k w^T x^r = w^T x^r$$

□

+

+

+

## Appartenenza a $\text{conv}(S)$

Dato un insieme  $S = \{x^1, \dots, x^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ , è possibile certificare facilmente se un vettore  $y \in \mathbb{R}^n$  appartiene a  $\text{conv}(S)$ . Infatti, ciò è equivalente a determinare se il sistema lineare:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \lambda_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot x^i &= y \\ \lambda_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, k \end{aligned} \tag{1}$$

ammette soluzione oppure no.

+

+

+

## Separazione

**Proposizione 2** Sia  $S = \{x^1, \dots, x^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme finito e sia  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \text{conv}(S)$ . Allora esiste una disuguaglianza  $\alpha^T x \leq \beta$  che separa  $v$  da  $\text{conv}(S)$ , cioè risulta  $\alpha^T y \leq \beta$  per ogni  $y \in \text{conv}(S)$ , ma  $\alpha^T v > \beta$

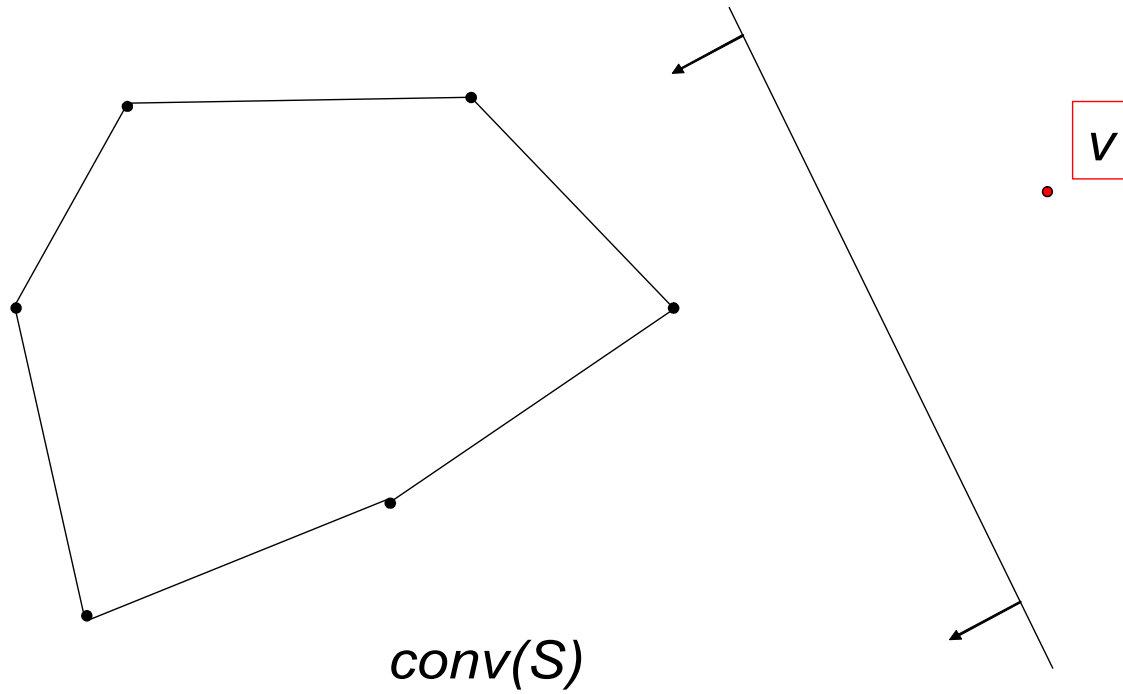
*Dimostrazione.* Per ipotesi, il sistema (1) non ammette soluzione. Quindi, per il lemma di Farkas, esiste  $z \in \mathbb{R}$  e  $p \in \mathbb{R}^n$  tali che

$$\begin{aligned} p^T x^i + z &\leq 0, & i = 1, \dots, k \\ p^T v + z &> 0. \end{aligned}$$

Si ponga  $\alpha = p$  e  $\beta = -z$ . Essendo  $\alpha^T x^i \leq \beta$ , per  $i = 1, \dots, k$ , la Proposizione 1 implica  $\alpha^T y \leq \beta$ , per ogni  $y \in \text{conv}(S)$ .  $\square$

+

# Separazione



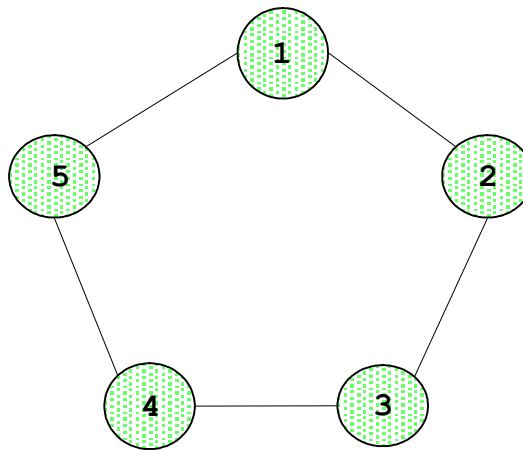


+

+

## Esempio

Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^5$  la collezione di tutti gli insiemi stabili massimali del seguente grafo:



$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

+

+

+

## Esempio

Verifichiamo se il vettore  $y^T = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$  appartiene a  $\text{conv}(S)$ .

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$$

+

+

+

## Esempio

il sistema

$$z] \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1$$

$$p_1] \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1/2$$

$$p_2] \quad \lambda_3 + \lambda_4 = 1/2$$

$$p_3] \quad \lambda_1 + \lambda_5 = 1/2$$

$$p_4] \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 1/2$$

$$p_5] \quad \lambda_4 + \lambda_5 = 1/2$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$$

non ammette soluzione

+

+

+

## Esempio

il sistema alternativo

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + 2z > 0$$

$$p_1 + p_3 + z \leq 0$$

$$p_1 + p_4 + z \leq 0$$

$$p_2 + p_4 + z \leq 0$$

$$p_2 + p_5 + z \leq 0$$

$$p_3 + p_5 + z \leq 0$$

ammette la soluzione  $(1, 1, 1, 1, 1, z = -2)$

quindi, la disuguaglianza  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$  separa  $y$  da  $\text{conv}(S)$

+

## Poliedri

- l'insieme delle soluzioni di un sistema finito di disuguaglianze lineari  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  è detto *poliedro*. Un poliedro limitato si dice *politopo*.
- La dimensione  $\dim(P)$  di un poliedro  $P$  è il massimo numero di punti affinementemente indipendenti in  $P$  (*rango affine*) meno uno.
- Un punto  $y \in P$  è detto *vertice* di  $P$  se non può essere ottenuto come combinazione convessa di altri punti di  $P$ .
- Un poliedro ha un insieme finito di vertici; Un poliedro si dice *puntato* se ha almeno un vertice; ogni politopo è puntato.

+

+

## Disuguaglianze valide

- Una disuguaglianza  $\alpha x \leq \beta$  è *valida* per un poliedro  $P$  se  $P \subseteq \{x : \alpha x \leq \beta\}$ ;
- una disuguaglianza  $\alpha x \leq \beta$  valida per  $P$  definisce una *faccia*  $F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha x = \beta\}$  di  $P$ ; l'insieme  $\{x \in \mathbb{R}^n : \alpha x = \beta\}$  è detto *iperpiano di supporto* di  $F$ ;
- Data una faccia  $F$  di  $P$  risulta ovviamente  $\dim(F) \leq \dim(P)$ . Se  $\dim(F) = \dim(P)$ , il poliedro  $P$  è contenuto in  $F$  ed  $F$  è detta faccia *impropria*. Una faccia  $F$  ha dimensione 0 se e solo se è un vertice di  $P$ .

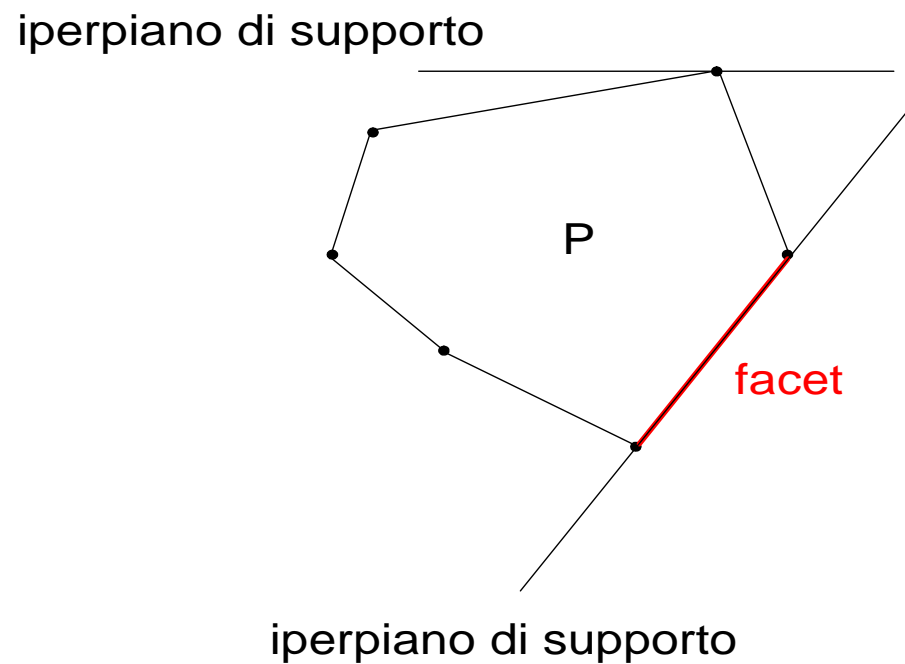
+

+

+

## Facce massimali

Una faccia  $F$  di  $P$  per cui  $\dim(F) = \dim(P) - 1$ ,  $F$  è detta *faccia massimale* o *facet*;



+

## Caratterizzazione di un politopo

**Teorema 1** *Un politopo coincide con l'involucro convesso dei suoi vertici*

**Dimostrazione.** Sia  $P$  un politopo non vuoto e siano  $v^1, \dots, v^k$  i suoi vertici ( $P$  è puntato). Ovviamente  $\{v^1, \dots, v^k\} \subseteq P$ . Supponiamo che esista  $u \in P \setminus \text{conv}(\{v^1, \dots, v^k\})$ . Allora, per la Proposizione 2, esiste una disuguaglianza  $\alpha x \leq \beta$  che separa  $u$  da  $\text{conv}(\{v^1, \dots, v^k\})$ . Sia  $\beta^* = \max\{\alpha^T x : x \in P\}$ . Essendo  $u \in P$  risulta  $\beta^* > \beta$ . Ma allora la faccia  $F = \{x \in P : \alpha^T x = \beta^*\}$  non contiene vertici di  $P$ , contraddizione.  $\square$



## Caratterizzazione di un politopo

**Teorema 2** *Un insieme  $P$  è un politopo se e solo se esiste un insieme finito  $V$  tale che  $P$  coincide con l'involucro convesso di  $V$ .*

**Dimostrazione.** Una direzione deriva immediatamente dal Teorema 1. Per l'altra direzione, sia  $V = \{v^1, \dots, v^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme finito e sia  $P = \text{conv}(V)$ .

Definiamo un politopo che contiene tutte le disuguaglianze valide per  $P$  e, quindi, ne scegliamo un insieme finito utilizzando il Teorema 1.

Si consideri l'insieme  $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  definito da

$$\{(\alpha, \beta) : \alpha \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}, -e \leq \alpha \leq e, -1 \leq \beta \leq 1, \alpha^T v \leq \beta \text{ per ogni } v \in V\}$$

+

+

## Dimostrazione

Essendo  $V$  finito, l'insieme  $Q = \{(\alpha, \beta) : \alpha \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}, -e \leq \alpha \leq e, -1 \leq \beta \leq 1, \alpha^T v \leq \beta \text{ per ogni } v \in V\}$  è un politopo.

Quindi, per il Teorema 1, coincide con l'involucro convesso dei suoi vertici  $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix}$ .

Dimostriamo che il sistema lineare

$$\begin{aligned} a_1^T x &\leq b_1 \\ a_2^T x &\leq b_2 \\ &\dots \\ a_m^T x &\leq b_m \end{aligned} \tag{2}$$

definisce  $P$ .

+

+

+

## Dimostrazione

**1.**  $P$  è contenuto nella soluzione del sistema (2).

Sia  $\bar{x} \in P$ . Allora,  $\bar{x} = \lambda_1 v^1 + \dots, \lambda_k v^k$ , con  $\sum_{r=1, \dots, k} \lambda_r = 1$ ,  $\lambda_r \geq 0$ .  
Quindi, per ogni  $i = 1, \dots, m$  risulta

$$a_i^T \bar{x} = \lambda_1 a_i^T v^1 + \dots + \lambda_k a_i^T v^k \leq \lambda_1 b_i + \dots + \lambda_k b_i = b_i \quad (3)$$

+

+

+

## Dimostrazione

2. Ogni soluzione del sistema (2) è contenuta in  $P$ .

Sia  $\bar{x}$  una soluzione del sistema (2) e si assuma  $\bar{x} \notin P$ . Allora, per la Proposizione 2, esiste una disuguaglianza  $w^T x \leq t$  che separa  $\bar{x}$  da  $P$ . Si può inoltre assumere  $-e \leq w \leq e$ ,  $-1 \leq t \leq 1$  e, cioè,  $\begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix} \in Q$  (questo è sempre ottenibile dividendo  $w$  e  $t$  per una costante).

Ciò implica che  $\begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix}$  può essere scritto come combinazione convessa dei vertici di  $Q$ ,  $\begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \dots, \gamma_m \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix}$ , con  $\sum_{r=1, \dots, m} \gamma_r = 1$ ,  $\gamma_r \geq 0$ .

Quindi,

$$w^T \bar{x} = \gamma_1 a_1^T \bar{x} + \dots, \gamma_m a_m^T \bar{x} \leq \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_m b_m = t \quad (4)$$

ma questa è una contraddizione a  $w^T \bar{x} > t$ . Quindi,  $\bar{x} \in P$ . □

+

## Dominanza fra disuguaglianze

- Date due disuguaglianze  $ax \leq \alpha$  e  $cx \leq \gamma$ , si dice che la prima *domina* la seconda se esiste un  $\lambda > 0$  tale che  $a = \lambda c$  e  $\gamma \leq \lambda \alpha$ . Inoltre risulta  $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq \alpha\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \leq \gamma\}$ . Se gli insiemi di soluzioni coincidono le disuguaglianze si dicono equivalenti;

**Proposizione 3** *Una disuguaglianza  $ax \leq \alpha$  è valida per un poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  se e solo se è equivalente o dominata da una disuguaglianza della forma  $u^T Ax \leq u^T b$ , con  $u \geq 0_m$ , ovvero da una combinazione conica delle disuguaglianze del sistema.*

## Rappresentazione minimale di un poliedro

- la rappresentazione esterna  $Ax \leq b$  di un poliedro non è univocamente determinata. Infatti, è sempre possibile aggiungere alla rappresentazione nuove disuguaglianze valide per  $P$ , senza modificare l'insieme delle sue soluzioni.
- la rappresentazione  $Ax \leq b$  di  $P$  è *minimale* se rimuovendo una qualsiasi disuguaglianza si ottiene un sistema  $A'x \leq b'$  tale che  $P \subset \{x \in \mathbb{R}^n : A'x \leq b'\}$ ;

**Proposizione 4** *La rappresentazione  $Ax \leq b$  di un poliedro  $P$  di dimensione  $n$  è minimale se e solo se ciascuna disuguaglianza del sistema definisce una faccia massimale di  $P$ . Inoltre, ogni faccia massimale di  $P$  è definita da una disuguaglianza del sistema  $Ax \leq b$ .*

+

+

## Programmazione Lineare $\{0, 1\}$

Dato un insieme di vettori  $S \subseteq \{0, 1\}^n$  (*regione ammissibile*) ed un vettore di costo  $c \in \mathbb{R}^n$ , determinare una soluzione ammissibile  $x^* \in S$  tale da minimizzare la funzione lineare  $c^T x$ .

### PL01

$$\begin{array}{ll} \min & cx \\ & x \in S \end{array}$$

**Commento 5** Essendo  $S \subseteq \{0, 1\}^n$ ,  $S$  ha un numero finito di elementi

**Commento 6** Non ci sono ipotesi sulla struttura di  $S$ .

+

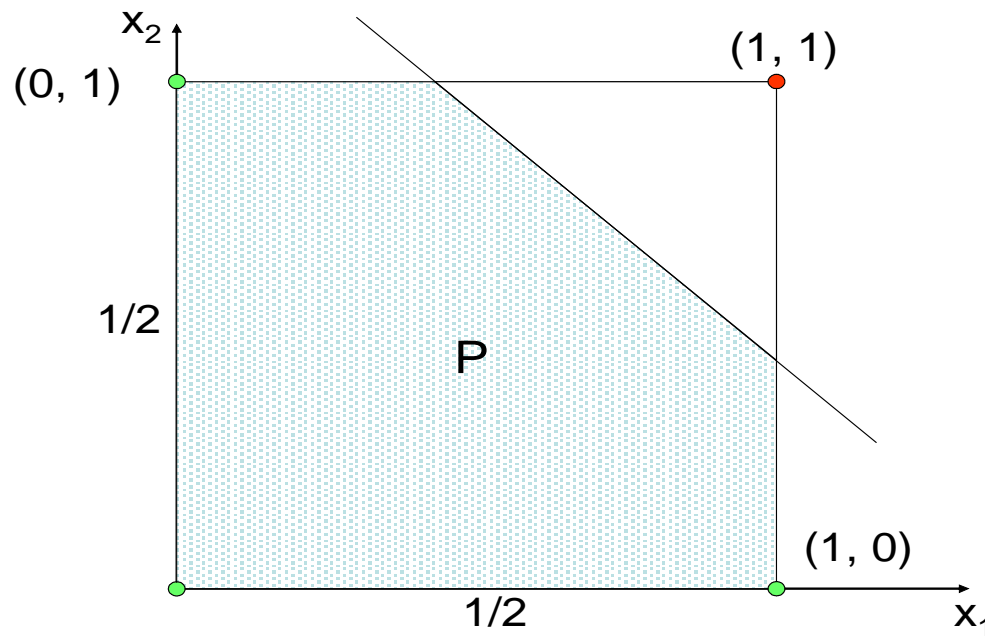
+

+

## Formulazioni lineari

**Definizione 7** Un poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  è una formulazione lineare del problema  $(S, c)$  se e solo se  $S = P \cap \{0, 1\}^n$

Esempio:  $S = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$



+



## Esistenza di una formulazione Lineare

**Teorema 3** *Un problema  $(S, c)$  di PL01 ammette sempre la formulazione lineare  $\text{conv}(S)$  con la proprietà che  $x \in S$  se e solo se  $x$  è un vertice di  $\text{conv}(S)$ .*

**Dimostrazione.** Poiché l'insieme  $S$  è finito, il teorema 2 implica che  $\text{conv}(S)$  è un politopo e, per il Teorema 1, i suoi vertici appartengono ad  $S$ . Inoltre, tutti i vettori in  $\{0, 1\}^n$  sono vertici del cubo unitario  $\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, \text{ per } i = 1, \dots, n\}$  e nessun vettore  $x \in \{0, 1\}^n$  è esprimibile come combinazione convessa degli altri. Quindi,

- tutti e soli i punti di  $S$  sono vertici di  $\text{conv}(S)$ ;
- tutti i punti  $x \in \{0, 1\}^n \setminus S$  non appartengono a  $\text{conv}(S)$

□

+

+

## Rilassamento lineare

Sia  $P$  una formulazione lineare del problema  $(S, c)$  di PL01. Questo può essere riscritto come

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & x \in P \\ & x \in \{0, 1\}^n \end{aligned}$$

Il problema di PL

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & x \in P \end{aligned}$$

è detto *rilassamento lineare* di  $(S, c)$ .

+

## Lower bound

La soluzione ottima  $\hat{x}$  del rilassamento lineare fornisce una limitazione inferiore (per un problema di minimo) del valore ottimo intero:

$$c^T \hat{x} \leq \min\{c^T x : x \in S\}$$

- Se  $\hat{x} \in S$ , allora è anche soluzione ottima di  $(S, c)$ . Inoltre, se  $\hat{x} \notin S$  ma esiste una soluzione  $\bar{x} \in S$  per cui  $c^T \hat{x} = c^T \bar{x}$ , allora  $\hat{x}$  è ottima di  $(S, c)$ .
- Dato un problema  $(S, c)$  di PL01 è possibile definire diverse formulazioni lineari di  $(S, c)$ . Diverse formulazioni producono diversi lower bound del valore ottimo.

+

+

## Gerarchia di formulazioni

Dato un problema  $(S, c)$  di PL01, siano  $P_1$  e  $P_2$  due formulazioni lineari distinte di  $(S, c)$ .

- consideriamo  $P_1$  migliore di  $P_2$  se  $\min_{x \in P_1} c^T x > \min_{x \in P_2} c^T x$
- è importante definire un criterio di confronto delle formulazioni indipendente dalla funzione obiettivo;

**Definizione 8** Si dice che  $P_1$  è migliore di  $P_2$  se e solo se  $P_1 \subset P_2$  □

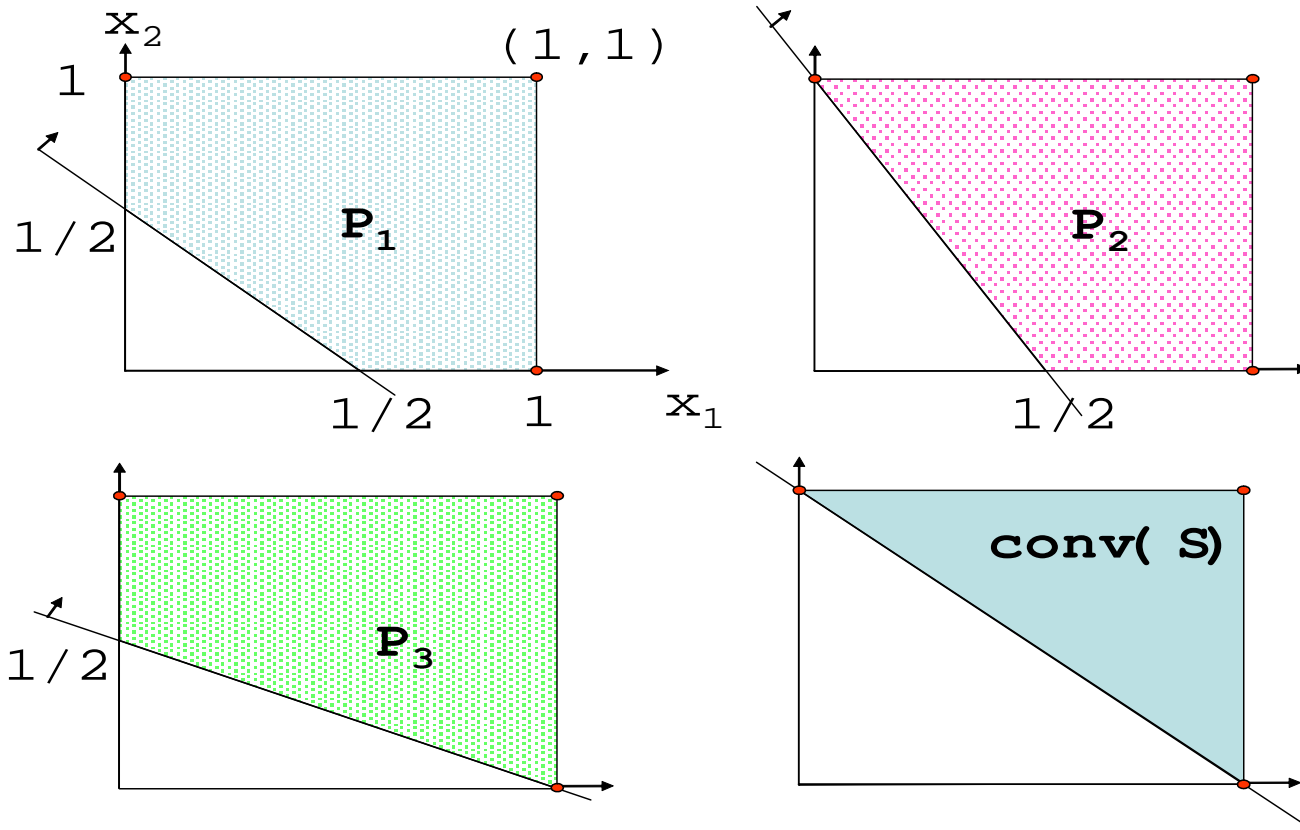
- Quindi, la migliore formulazione possibile è rappresentata dal poliedro contenuto in tutti i poliedri contenenti  $S$ , cioè da  $\text{conv}(S)$

+

+

+

## Gerarchia di formulazioni



$P_2$  migliore di  $P_1$ ;       $P_3$  migliore di  $P_1$ ;       $P_2$  e  $P_3$  non confrontabili

$\text{conv}(S)$  formulazione "ottima"

+

+

+

## PL01 e Programmazione Lineare

Per il Teorema 3, un generico problema di PL01 può essere sempre trasformato in un problema di PL nella forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & x \in \text{conv}(S) \end{aligned} \tag{5}$$

Infatti, poiché i vertici di  $\text{conv}(S)$  coincidono con i vettori di  $S$ , risolvere il problema  $(S, c)$  equivale ad individuare un vertice ottimo del problema di PL

+

## Generazione completa della formulazione ottima

Esistono diversi metodi per ottenere  $\text{conv}(S)$  a partire da una generica formulazione di un problema di PL01. Fra questi, la procedura di Chvátal-Gomory ha importanti conseguenze algoritmiche.

**Definizione 9** *Data una formulazione  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  del problema  $(S, c)$  si dice taglio di Chvátal-Gomory (CG) prodotto da  $P$  la disuguaglianza*

$$\lfloor u^T A \rfloor x \leq \lfloor u^T b \rfloor \tag{6}$$

*per ogni possibile vettore  $u \geq 0_m$  di moltiplicatori non-negativi*

+

+

## Validità

**Teorema 4** *La disuguaglianza (6) è valida per  $\text{conv}(S)$ .*

**Dimostrazione.** Dobbiamo dimostrare che la disuguaglianza  $\lfloor u^T A \rfloor x \leq \lfloor u^T b \rfloor$  è soddisfatta da ogni vettore  $y \in S$ . Naturalmente, ogni vettore  $y \in S$  soddisfa la disuguaglianza  $u^T A x \leq u^T b$ . Inoltre, poiché  $y \geq 0_m$ , risulta  $\lfloor u^T A \rfloor y \leq u^T A y \leq u^T b$ . Essendo  $\lfloor u^T A \rfloor y$  un numero intero, abbiamo che  $\lfloor u^T A \rfloor y \leq \lfloor u^T b \rfloor$  □

Si osservi che la disuguaglianza (6) non è, in generale, valida per  $P$ .

+

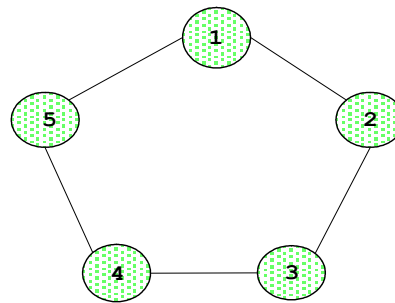


+

+

## Esempio

Consideriamo il grafo  $G$  ( $5 - hole$ ):



e la “formulazione archi” del problema del massimo insieme stabile:

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 + x_3 \leq 1$$

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

$$x_4 + x_5 \leq 1$$

$$x_1 + x_5 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

+

+

+

## Esempio

Sommando tutte le disuguaglianze che definiscono il poliedro, ciascuna moltiplicata per  $1/2$  si ottiene:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 5/2$$

e, applicando l'arrotondamento,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$$

soddisfatta da tutti gli insiemi stabili di  $G$ .

+

## Prima chiusura di Chvátal

I tagli CG costituiscono una famiglia infinita di disuguaglianze valide per  $P$ . Quindi, non è immediato concludere che l'insieme

$$P^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, \lfloor u^T A \rfloor x \leq \lfloor u^T b \rfloor, u \geq 0_m, u \in \mathbb{R}^m\}$$

è un poliedro. In realtà, si dimostra che sono un sottoinsieme finito  $Dx \leq d$  dei tagli CG è sufficiente alla descrizione di  $P^1$ . Cioè,

$$P^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, Dx \leq d\} = \{A^1 x \leq b^1\}$$

Tale poliedro è detto *Prima chiusura di Chvátal*.

**Commento 10** Essendo  $P^1 \subseteq P$ ,  $P^1$  rappresenta una formulazione del problema  $(S, c)$  migliore di  $P$ .

## Chiusura $i$ -ma di una formulazione

In generale, data una certa formulazione iniziale  $P$  di un problema  $(S, c)$ , non tutte le disuguaglianze valide per  $\text{conv}(S)$  sono ottenibili come tagli di Chvátal-Gomory.

Tuttavia, essendo  $P^1$  un poliedro, è possibile definire la sua prima chiusura  $P^2$ , con la proprietà che  $\text{conv}(S) \subseteq P^2 \subseteq P^1 \subseteq P$ .  $P^2$  è detta *seconda chiusura* di  $P$ .

Generalizzando, possiamo dare la seguente

**Definizione 11** Un poliedro  $P^i = \{x \in \mathbb{R}^n : A^i x \leq b^i\}$  ottenuto da  $P$  mediante  $i \geq 1$  applicazioni dell'operazione di chiusura, è detto *chiusura  $i$ -ma della formulazione  $P$* .

## Generazione completa della formulazione ottima

Nel costruire la  $i$ -ma chiusura di  $P$  si ottiene quindi una sequenza di formulazioni  $P^1, P^2, \dots, P^i$  del problema  $(S, c)$  tali che  $P \supseteq P^1 \supseteq P^2 \supseteq \dots \supseteq P^i$

Sussiste il seguente

**Teorema 5** *Per ogni problema  $(S, c)$  di PL01 ed ogni formulazione lineare  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  di  $(S, c)$  esiste un intero finito  $t$  tale che la formulazione ottima  $\text{conv}(S)$  coincide con la chiusura  $t$ -ma  $P^t = \{x \in \mathbb{R}^n : A^t x \leq b^t\}$  di  $P$ .  $\square$*

+

+

## Rango di Chvátal di una disuguaglianza

Consideriamo una disuguaglianza  $\alpha^T x \leq \beta$  che induce una faccia massimale di  $\text{conv}(S)$  (quindi indispensabile per la rappresentazione di  $\text{conv}(S)$ ). Per il teorema (5), deve esistere un indice minimo  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  tale che  $\alpha^T x \leq \beta$  appartenga alla  $k$ -ma chiusura di  $P$ .

Il valore  $k$  è detto *rango di Chvátal* della disuguaglianza rispetto alla formulazione  $P$ .

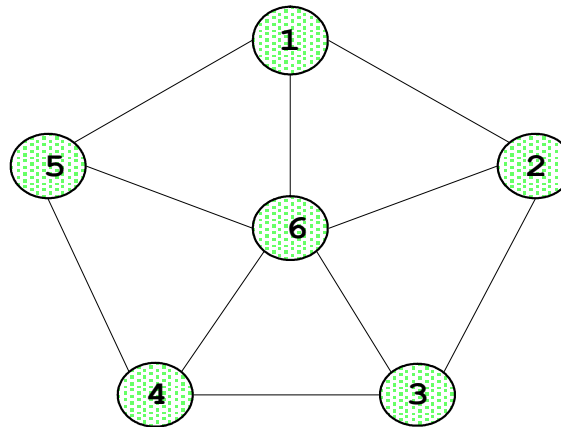
+

+

+

## Esercizio

Dato il grafo  $G$ :



Sia  $P$  la “formulazione archi” del corrispondente problema di massimo insieme stabile. Calcolare il rango di Chvátal delle seguenti disuguaglianze:

1.  $x_1 + x_2 + x_6 \leq 1$

2.  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 \leq 2$

+

## Metodo del piano di taglio

- I metodi di generazione completa della formulazione ottima non sono praticamente applicabili a causa del numero, in generale molto grande, di disuguaglianze necessarie.
- Al contrario, il metodo del piano di taglio ha l'obiettivo di generare una formulazione  $\bar{P}$  di  $(S, c)$  tale che la soluzione ottima del problema  $\min\{c^T x : x \in \bar{P}\}$  appartenga ad  $S$ .



+

+

## Piani di taglio

Sia  $P$  una formulazione di un problema  $(S, c)$  di PL01 e sia  $x^*$  la soluzione del corrispondente rilassamento lineare.

**Definizione 12** *Una disuguaglianza  $\alpha^T x \leq \beta$  è detta taglio rispetto a  $x^*$  se:*

$$(i) \quad \alpha^T x \leq \beta \text{ per ogni } x \in S$$

$$(ii) \quad \alpha^T x^* > \beta$$

*Il problema di determinare un taglio è detto problema di separazione di  $x^*$  da  $S$ .*

+

+

+

## Esempio

Consideriamo ancora la “formulazione archi” del problema del massimo insieme stabile sul 5 – *hole*:

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 + x_3 \leq 1$$

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

$$x_4 + x_5 \leq 1$$

$$x_1 + x_5 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

ed il vertice frazionario  $x^* = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$ . La disuguaglianza  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$  è un taglio rispetto ad  $x^*$ .

+

+

+

## Metodo del piano di taglio

Il metodo del piano di taglio consiste nella generazione iterativa di tagli, cioè nella soluzione di una sequenza di problemi di separazione.

---

**begin**

calcola la soluzione ottima  $x^*$  del rilassamento lineare  $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0_n\}$

**while**  $x^*$  non intero **do**

**begin**

risolve il problema di separazione di  $x^*$  da  $S$ ;

aggiunge la disuguaglianza ottenuta  $\alpha^T x + x_{n+1} = \beta$  alla formulazione corrente;

$n := n + 1$ ;

calcola la soluzione ottima  $x^*$  del rilassamento lineare corrente (Simplesso duale);

**end**

**end**

---

La convergenza del metodo in un numero finito di passi dipende dall'algoritmo che risolve il problema di separazione.

+

+

+

## Tagli di Gomory

Particolari tagli di CG ottenuti sfruttando il tableau ottimo (associato alla soluzione  $x^*$ ) del rilassamento lineare corrente.

	$-c_B^T B^{-1}b$	$0 \dots 0$	$c_N^T - c_B^T B^{-1}N$
$x_{B(1)}$ $\vdots$ $x_{B(m)}$	$B^{-1}b = \bar{b}$	$I$	$B^{-1}N = \bar{N}$

Se  $x^*$  è intera, allora è anche ottima. Altrimenti, sia  $x_h^*$  una sua componente frazionaria, in base su una certa riga  $t$  del tableau ottimo ( $B(t) = h$ ). L'equazione (generatrice) corrispondente, valida per  $P$ , è:

$$x_h + \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j = (B^{-1}b)_t = \bar{b}_t \quad (7)$$

+

+

+

## Tagli di Gomory

Il taglio di CG ottenuto ponendo  $u^T = e_t^T B^{-1}$ :

$$x_h + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{b}_t \rfloor \quad (8)$$

è detto *taglio di Gomory*. Questo è violato da  $x^*$ . Infatti, essendo  $x_j = 0$  per ogni  $j \in N$ , risulta:

$$(x_h + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j)_{x=x^*} = x_h^* = \bar{b}_t > \lfloor \bar{b}_t \rfloor \quad (9)$$

+

+

+

## Aggiornamento del tableau

La disuguaglianza (9) viene trasformata in forma standard, aggiungendo la nuova variabile slack  $s \geq 0$ :

$$x_h + \sum_{j \in N} [\bar{a}_{ij}] x_j + s = [\bar{b}_t] \quad (10)$$

sottraendo a questa l'equazione generatrice  $x_h + \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_t$ , si ottiene:

$$\sum_{j \in N} ([\bar{a}_{ij}] - \bar{a}_{ij}) x_j + s = [\bar{b}_t] - \bar{b}_t \quad (11)$$

Si osservi che nel taglio così ottenuto non compaiono variabili in base.

+

+

+

### Struttura del nuovo tableau

$-c_B^T B^{-1}b$	$0 \dots 0$	$c_N^T - c_B^T B^{-1}N \geq 0$	0
$\bar{b}_t$	$0 \dots 1 \dots 0$	$\bar{a}_{ij}$	0 ⋮ 0
$[\bar{b}_t] - b_t$	$0 \dots 0 \dots 0$	$[\bar{a}_{ij}] - a_{ij}$	1

Si osservi che tale struttura mantiene l'ammissibilità duale, rendendo possibile l'applicazione del metodo del simplesso duale.

+

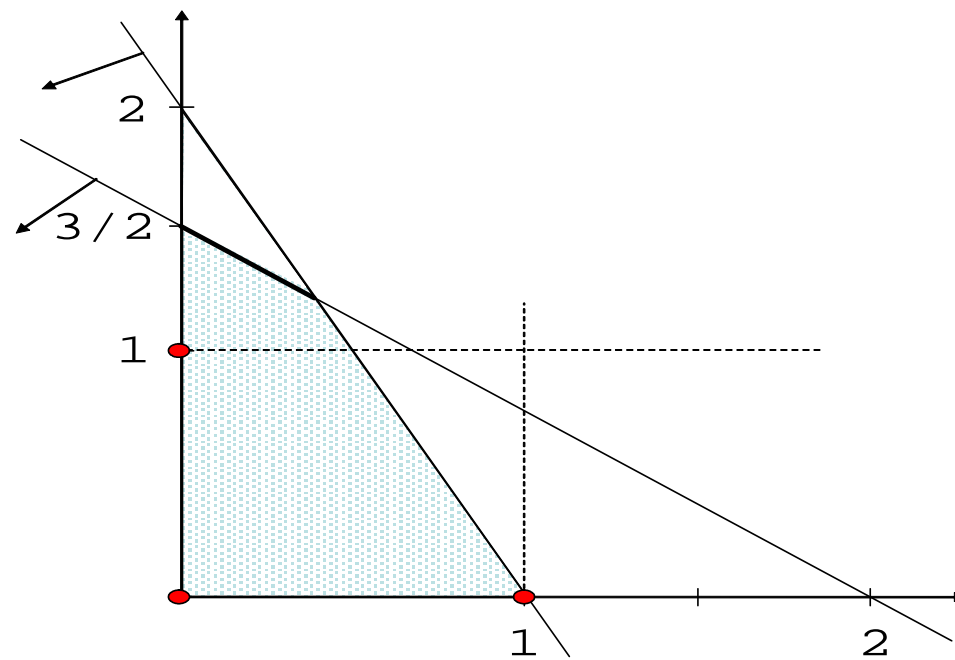
## Considerazioni computazionali

- l'utilizzo dei tagli di Gomory nel metodo del piano di taglio ne garantisce la convergenza in un numero finito (in genere elevatissimo) di passi;
- fra i possibili tagli violati contenuti nel tableau ottimo, può essere vantaggioso aggiungere il taglio più “profondo”: si sceglie la riga generatrice che massimizza  $b_t - \lfloor b_t \rfloor$ .
- in alternativa è possibile aggiungere tutti i tagli per cui  $b_t - \lfloor b_t \rfloor \geq \epsilon$ , con  $\epsilon$  parametro fissato (ad. es.  $\epsilon = 0.01$ )



## Esempio 1

$$\begin{aligned} \min & -x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + s_1 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 &= 2 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



+

+

## Esempio 1

tableau iniziale:

0	-1	-1	0	0
6	3	4	1	0
2	<b>2</b>	1	0	1

iterazione 1:

1	0	-1/2	0	1
3	0	<b>5/2</b>	1	-3
1	1	1/2	0	1/2

iterazione 2:

8/5	0	0	1/5	2/5
6/5	0	1	2/5	-6/5
2/5	1	0	-1/5	11/10

+

+

+

## Esempio 1

Da cui  $x_1^* = 2/5$ ,  $x_2^* = 6/5$ ,  $z^* = -8/5$ .

Consideriamo il taglio di Gomory associato alla prima riga del tableau ottimo ( $t = 1$ ,  $h = 2$ ):

$$x_2 + \lfloor 2/5 \rfloor s_1 + \lfloor -6/5 \rfloor s_2 \leq \lfloor 6/5 \rfloor$$

cioè,

$$x_2 - 2s_2 \leq 1$$

da cui, ponendo in forma standard (con l'aggiunta di una nuova variabile slack  $s_3 \geq 0$ ):

$$x_2 - 2s_2 + s_3 = 1$$

+

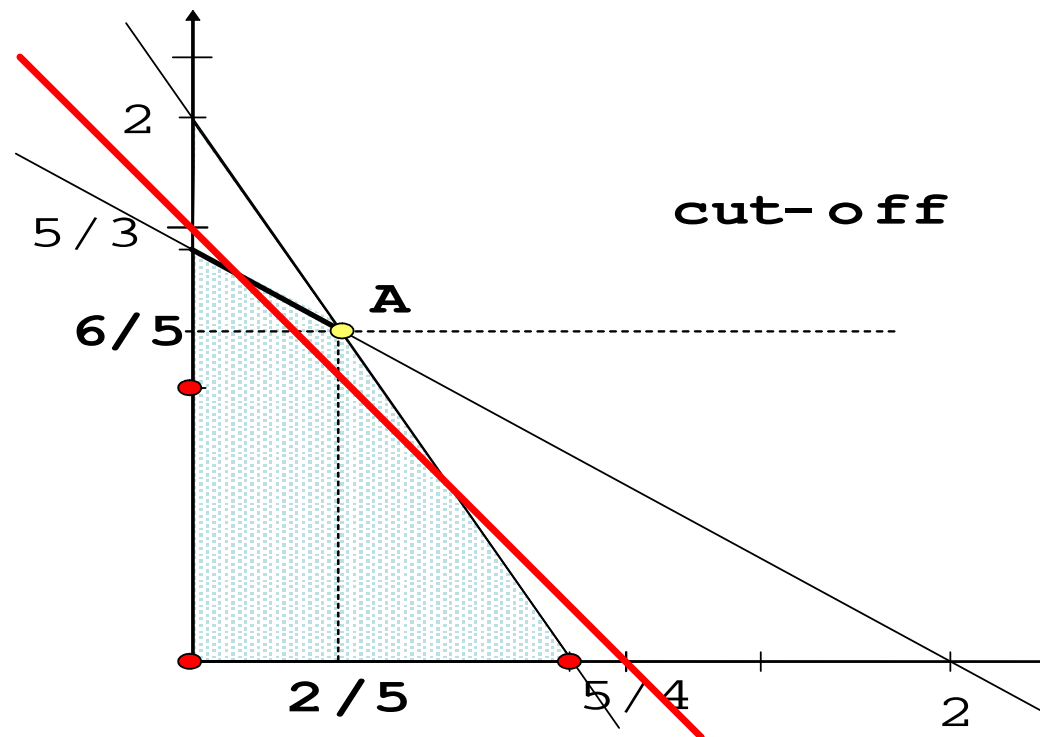
+

+

## Esempio 1

Sostituendo l'espressione di  $s_2$  in funzione delle variabili originali:

$$4x_1 + 3x_2 \leq 5$$



+

+

+

## Esempio 1

sottraendo al taglio  $x_2 - 2s_2 + s_3 = 1$  l'equazione generatrice  $x_2 + 2/5s_1 + -6/5s_2 = 6/5$  otteniamo

$$-2/5s_1 - 4/5s_2 + s_3 = -1/5$$

da cui il nuovo tableau:

8/5	0	0	1/5	2/5	0
6/5	0	1	2/5	-6/5	0
2/5	1	0	-1/5	11/10	0
-1/5	0	0	<b>-2/5</b>	-4/5	1

+

+

+

## Esempio 1

Con un solo pivot del simplesso duale si ottiene:

3/2	0	0	0	0	1/2
1	0	1	0	-2	1
1/2	1	0	0	3/2	-1/2
1/2	0	0	1	2	-5/2

quindi:  $x_1^* = 1/2$ ,  $x_2^* = 1$ ,  $s_1 = 1/2$

e l'equazione generatrice è:  $x_2 + 3/2s_2 - 1/2s_3 = 1/2$ , da cui si ottiene il nuovo taglio:  $x_2 + s_2 - s_3 \leq 0$

+

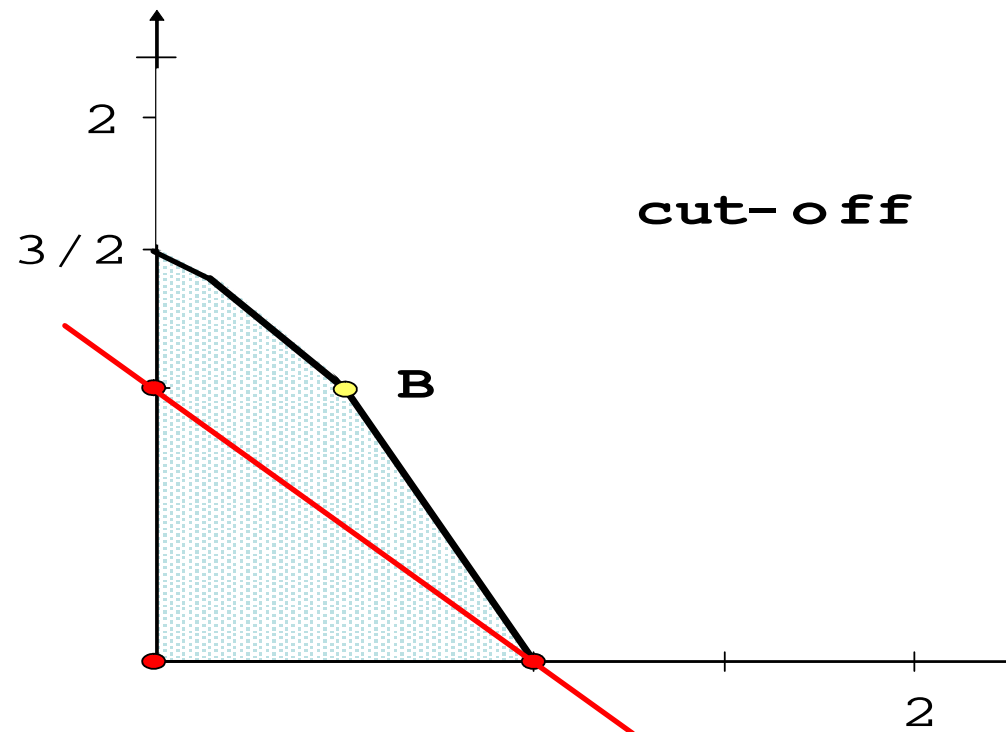
+

+

## Esempio 1

Sostituendo l'espressione di  $s_2, s_3$  in funzione delle variabili originali:

$$x_1 + x_2 \leq 1$$



+

+

+

## Esempio 1

il nuovo tableau è:

3/2	0	0	0	0	1/2	0
1	0	1	0	-2	1	0
1/2	1	0	0	3/2	-1/2	0
1/2	0	0	1	2	<b>-5/2</b>	0
- 1	0	0	0	1	-1	1

da cui, con un singolo pivot si ottiene il tableau ottimo:

1	0	0	0	1/2	0	1/2
0	0	1	0	-1	0	1
1	1	0	0	1	0	-1/2
3	0	0	1	-1/2	0	-5/2
1	0	0	0	-1	1	-1

con soluzione intera  $x_1^* = 1$ ,  $x_2^* = 0$

+

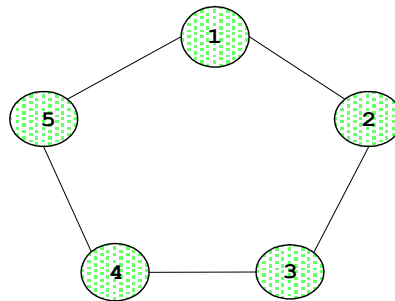


+

+

## Esempio

Consideriamo ancora la “formulazione archi” del problema del massimo insieme stabile sul 5 – *hole*:



$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 + x_3 \leq 1$$

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

$$x_4 + x_5 \leq 1$$

$$x_1 + x_5 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

+

+

+

## Esempio 2

Poniamo il problema in forma standard:

$$\min -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5$$

$$x_1 + x_2 + s_1 = 1$$

$$x_2 + x_3 + s_2 = 1$$

$$x_3 + x_4 + s_3 = 1$$

$$x_4 + x_5 + s_4 = 1$$

$$x_1 + x_5 + s_5 = 1$$

$$x_j, s_i \geq 0$$

+

+

+

## Esempio 2

tableau iniziale:

0	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0
1	<b>1</b>	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1

iterazione 1:

1	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	<b>1</b>	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	-1	0	0	1	-1	0	0	0	1

+

+

+

## Esempio 2

iterazione 2:

2	0	1	0	-1	-1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	-1	0	<b>1</b>	0	0	-1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	-1	0	0	1	-1	0	0	0	1

iterazione 3:

2	0	0	0	0	-1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	-1	0	1	0	0	-1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1	-1	1	0
0	0	-1	0	0	<b>1</b>	-1	0	0	0	1

+

+

+

## Esempio 2

iterazione 4:

2	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	-1	0	1	0	0	-1	1	0	0
1	0	<b>2</b>	0	0	0	1	1	-1	1	-1
0	0	-1	0	0	1	-1	0	0	0	1

iterazione 5:

5/2	0	0	0	0	0	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
1/2	1	0	0	0	0	1/2	-1/2	1/2	-1/2	1/2
1/2	0	0	1	0	0	-1/2	1/2	1/2	-1/2	1/2
1/2	0	0	0	1	0	1/2	-1/2	1/2	1/2	-1/2
1/2	0	1	0	0	0	1/2	1/2	-1/2	1/2	-1/2
1/2	0	0	0	0	1	-1/2	1/2	-1/2	1/2	1/2

+

+

+

## Esempio 2

ogni riga del tableau ottimo:

5/2	0	0	0	0	0	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
1/2	1	0	0	0	0	1/2	-1/2	1/2	-1/2	1/2
1/2	0	0	1	0	0	-1/2	1/2	1/2	-1/2	1/2
1/2	0	0	0	1	0	1/2	-1/2	1/2	1/2	-1/2
1/2	0	1	0	0	0	1/2	1/2	-1/2	1/2	-1/2
1/2	0	0	0	0	1	-1/2	1/2	-1/2	1/2	1/2

genera un taglio di Gomory. Ad esempio, con  $h = 1, t = 1$ :

$$x_1 - s_2 - s_4 \leq 0$$

esprimendo il taglio nelle variabili originali si ottiene:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$$

+

## Svantaggi dei tagli di Gomory

- il taglio generato dipende dalla formulazione  $P$ ;
- il taglio generato è indipendente da  $\text{conv}(S)$ ;

In generale, l'obiettivo del metodo del piano di taglio è quello di individuare un vertice  $x^*$  di  $P$  che sia anche vertice di  $\text{conv}(S)$ . Ciò equivale a generare  $n$  iperpiani contenenti  $x^*$  definiti da disuguaglianze valide per  $\text{conv}(S)$  le cui normali siano linearmente indipendenti.

Quindi, un requisito significativo dei tagli generati è che abbiano intersezione non vuota con  $\text{conv}(S)$  (faccia di  $\text{conv}(S)$ ).

Al contrario, i tagli di Gomory non garantiscono tale proprietà (non tutte le facce di  $\text{conv}(S)$  appartengono alla prima chiusura di Chvátal).