

Formulazioni con un numero di vincoli non polinomiale

Metodo del Simpleso Dinamico Primale

Il metodo del simpleso può essere usato per risolvere un problema di OC qualora sia nota una rappresentazione del tipo $Ax \leq b$ (rappresentazione esterna) dell'involucro convesso dei suoi insiemi ammissibili $\text{conv}(S)$.

Domanda

Abbiamo realmente bisogno di una rappresentazione esterna di $\text{conv}(S)$?

Problema del cammino minimo

Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato.

Dati

Coppia di nodi $s, t \in V$

$l_{uv} \in \mathcal{R}^+ \ \forall \ uv \in E$ lunghezza dell'arco uv

Problema

Determinare un st -cammino di lunghezza totale minima

Variabili decisionali

$x_{ij} = 1$ se l'arco ij appartiene al cammino st

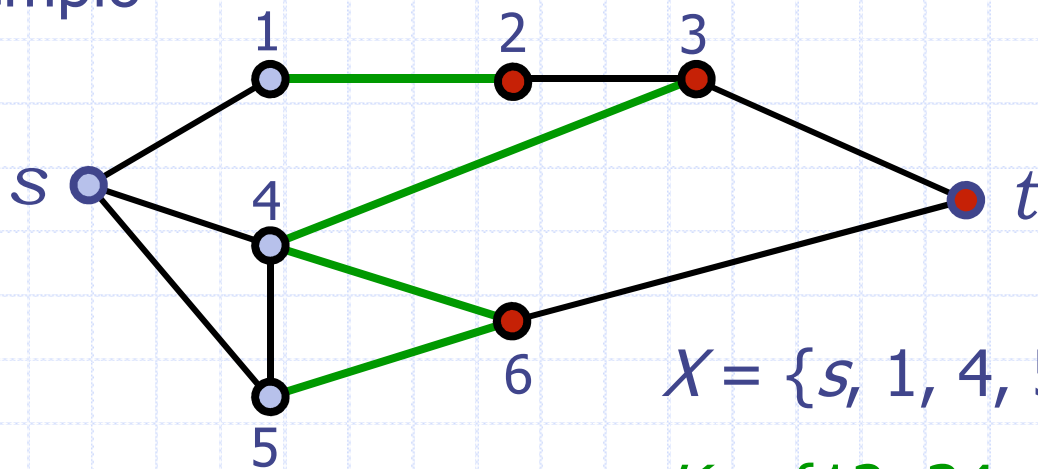
$x_{ij} = 0$ altrimenti

st -tagli

Un st -taglio è una partizione $(X, V-X)$ dei vertici di G tale che $s \in X$ e $t \in V-X$.

L'insieme K di spigoli con un estremo in X e l'altro in $V-X$ si dicono spigoli del taglio. Si dice peso del taglio la somma dei pesi sugli spigoli in K

Esempio



$$X = \{s, 1, 4, 5\} \quad V-X = \{2, 3, 6, t\}$$

$$K = \{12, 34, 46, 56\}$$

Formulazione

$$\min \sum_{uv \in E} l_{uv} x_{uv}$$
$$\sum_{uv \in K} x_{uv} \geq 1$$

\forall insieme K

corrispondente a un st – taglio

$$x \in \{0,1\}^{|E|}$$

- Ciascun vincolo esprime la condizione che almeno uno spigolo di ogni st -taglio deve appartenere al cammino da s a t .

Osservazioni

- Il numero dei vincoli è esponenziale rispetto alla cardinalità di E .
- Sebbene la matrice dei coefficienti non sia TUM, il rilassamento lineare (PL) di (P) fornisce la soluzione ottima del problema intero.

In pratica, il numero di vincoli rende impossibile “scrivere” le matrici del metodo del simplesso.

Simpleso Dinamico Primale

Idea

Il simpleso dinamico primale acquisisce le informazioni sulla struttura del poliedro attraverso un oracolo di separazione.

Oracolo di separazione

Dato $x^* \in \mathcal{R}^n$ restituisce una disequazione $a_i^T x \leq b_i$ del sistema $Ax \leq b$ violata da x^* oppure conclude che tutte le disequazioni del sistema $Ax \leq b$ sono soddisfatte da x^*

Algoritmo

Supponiamo di voler risolvere il problema

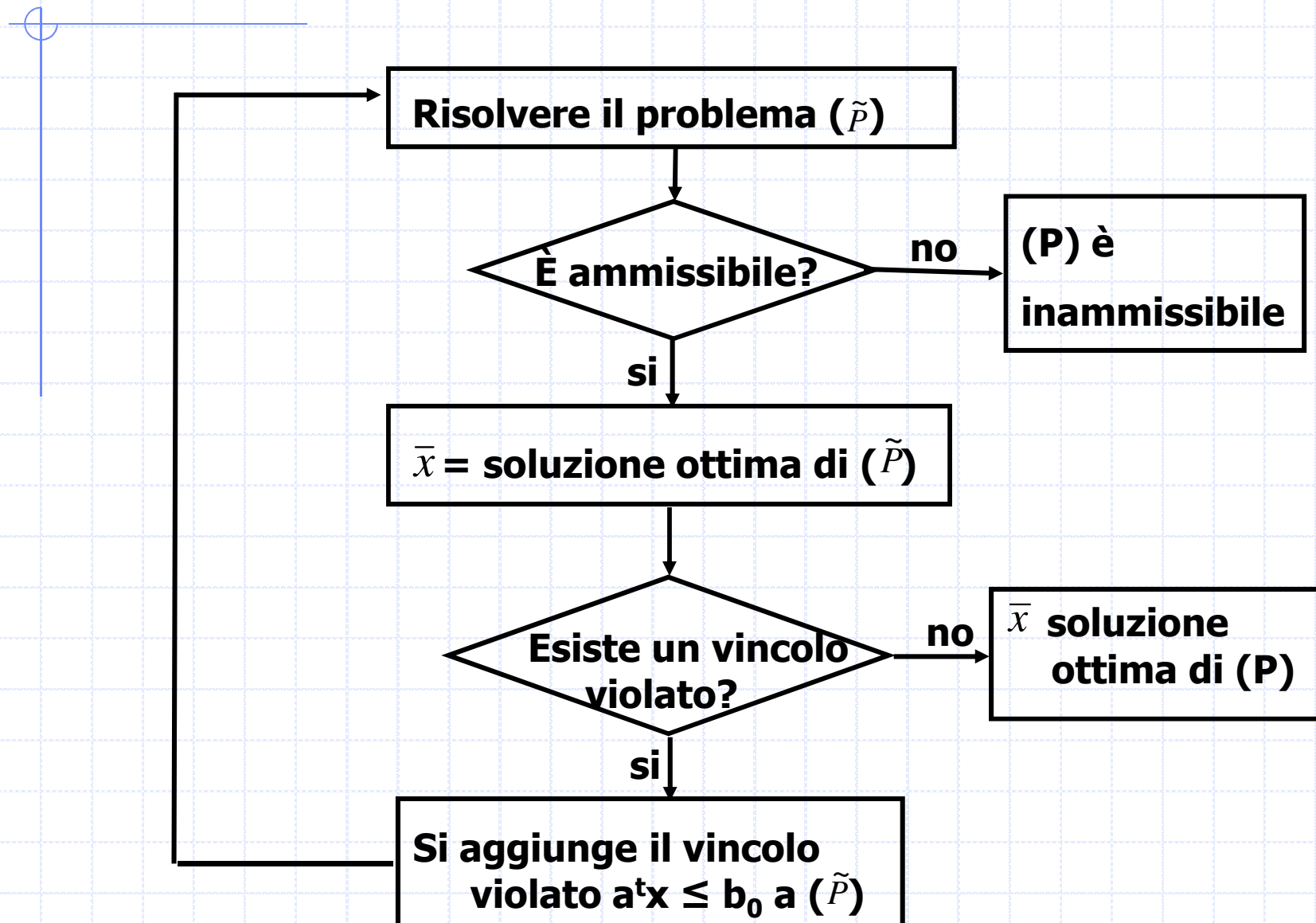
$$\begin{aligned} (P) \quad & \max \quad c^T x \\ & Ax \leq b \\ & 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

dove A è una matrice $(m \times n)$ e $b \in \mathcal{R}^m$.

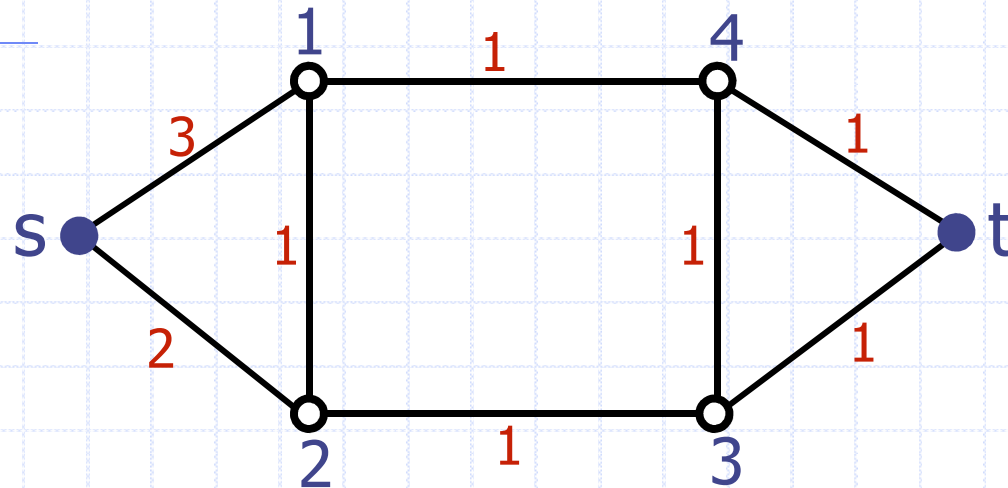
Sia D una sottomatrice di A con $q \ll m$ righe e n colonne. Definiamo il sottoproblema iniziale:

$$\begin{aligned} (\tilde{P}) \quad & \max \quad c^T x \\ & Dx \leq d \\ & 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Algoritmo



Esempio



Trovare l'st-cammino di lunghezza minima.

Partiamo dalla formulazione:

(\tilde{P})

$$\min \quad 3x_{s1} + 2x_{s2} + x_{12} + x_{23} + x_{14} + x_{34} + x_{4t} + x_{3t}$$

$$x_{s1} + x_{s2} \geq 1$$

$$x_{3t} + x_{4t} \geq 1$$

$$0 \leq x_{uv} \leq 1 \quad \forall uv \in E$$

Esempio

La soluzione ottima:

$$\bar{x}_{s2} = \bar{x}_{4t} = 1$$

$$\bar{x}_{s1} = \bar{x}_{12} = \bar{x}_{23} = \bar{x}_{14} = \bar{x}_{34} = \bar{x}_{3t} = 0$$

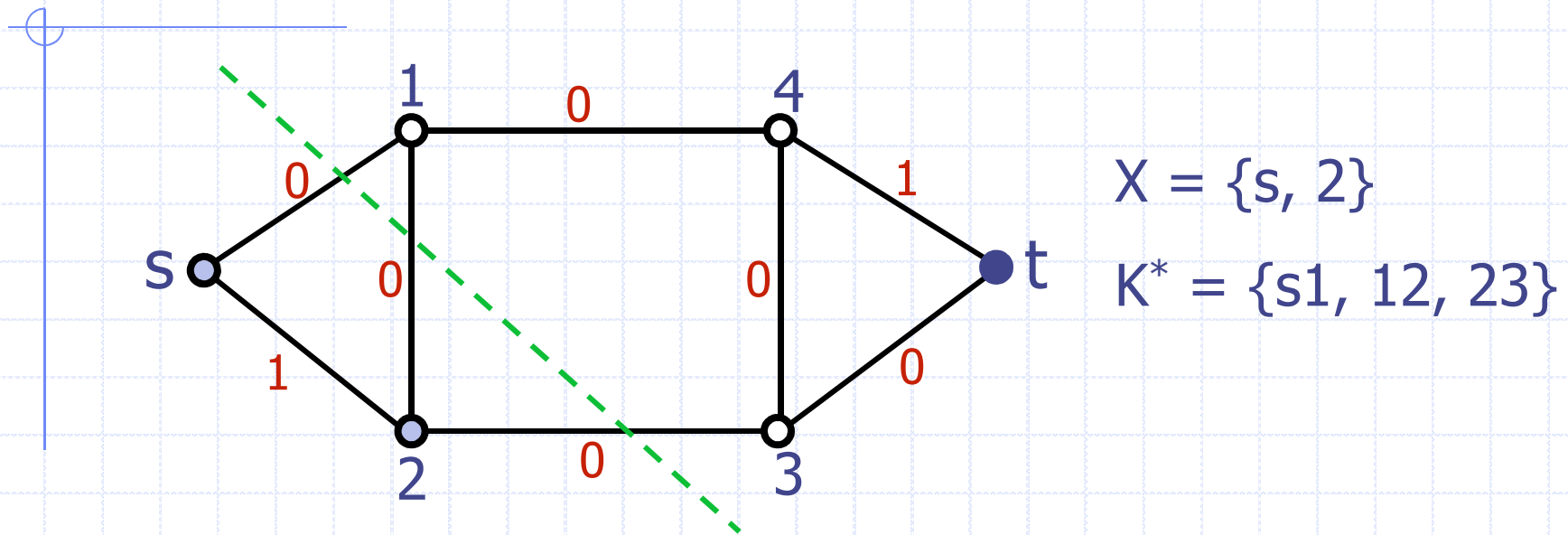
Oracolo di separazione

Associamo il peso \bar{x}_{uv} ad ogni arco $uv \in E$ e cerchiamo l'st-taglio di peso minimo.

Se il peso di tale taglio è < 1 allora il vincolo relativo è violato da \bar{x} .

Se il peso di K^* è ≥ 1 allora non ci sono disequazioni violate.

Esempio



Aggiungiamo al problema (\tilde{P}) il vincolo

$$x_{s1} + x_{12} + x_{23} \geq 1$$

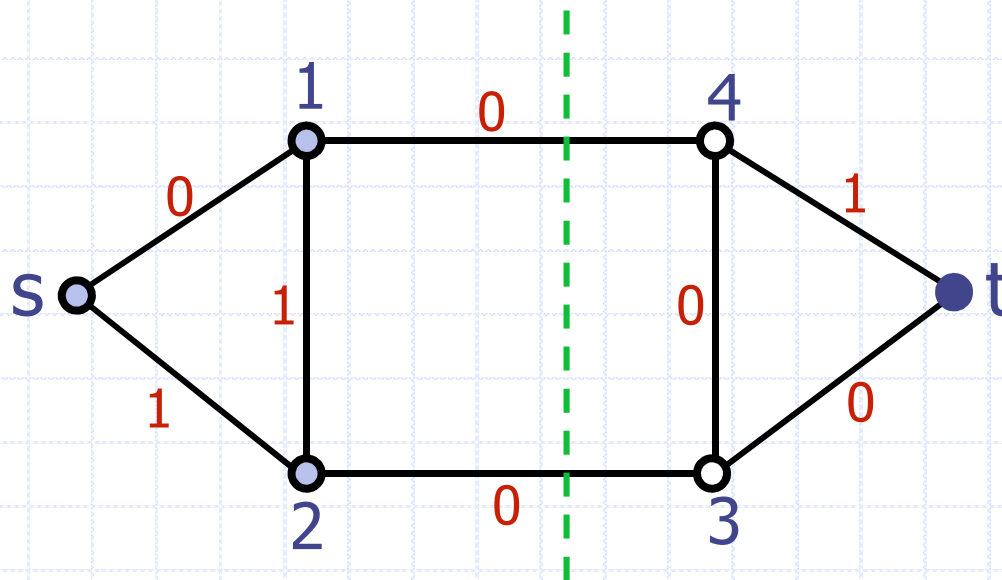
e risolviamo di nuovo.

Esempio

La nuova soluzione ottima è:

$$\bar{x}_{s2} = \bar{x}_{12} = \bar{x}_{4t} = 1$$

$$\bar{x}_{s1} = \bar{x}_{23} = \bar{x}_{14} = \bar{x}_{34} = \bar{x}_{3t} = 0$$



$$X = \{s, 1, 2\}$$

$$K^* = \{14, 23\}$$

Esempio

Aggiungiamo il vincolo violato:

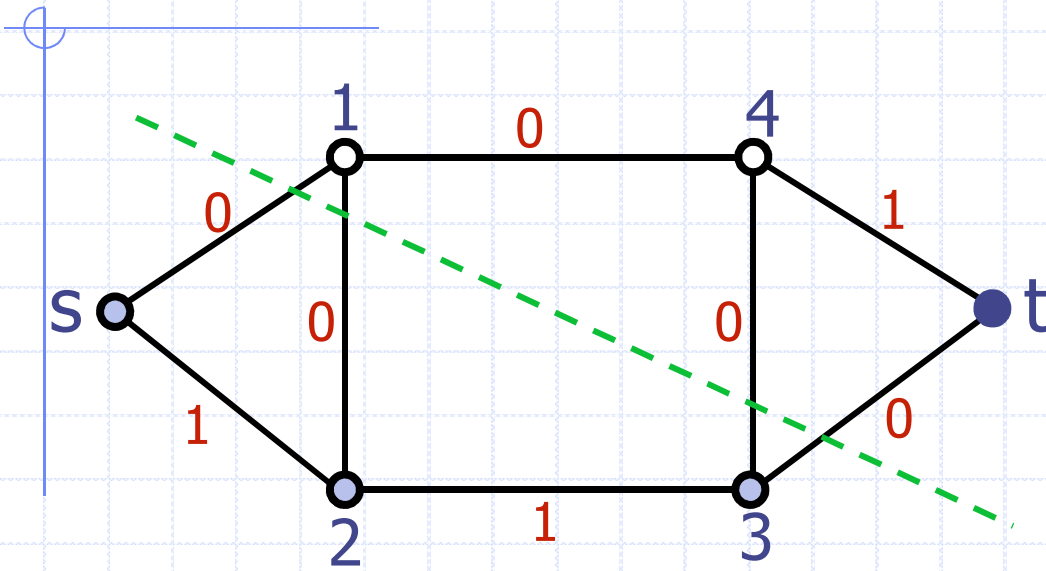
$$x_{14} + x_{23} \geq 1$$

La nuova soluzione ottima è:

$$\bar{x}_{s2} = \bar{x}_{23} = \bar{x}_{4t} = 1$$

$$\bar{x}_{s1} = \bar{x}_{12} = \bar{x}_{14} = \bar{x}_{34} = \bar{x}_{3t} = 0$$

Esempio



$$X = \{s, 2, 3\}$$

$$K^* = \{s1, 12, 34, 3t\}$$

Aggiungiamo il vincolo violato:

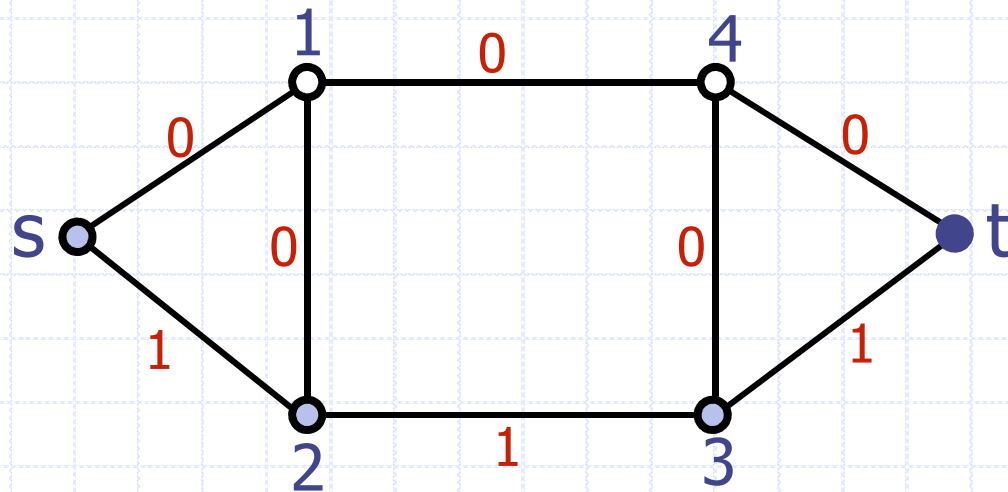
$$x_{s1} + x_{12} + x_{34} + x_{3t} \geq 1$$

Esempio

La nuova soluzione ottima è:

$$\bar{x}_{s2} = \bar{x}_{23} = \bar{x}_{3t} = 1$$

$$\bar{x}_{s1} = \bar{x}_{12} = \bar{x}_{14} = \bar{x}_{34} = \bar{x}_{4t} = 0$$



Non esistono st-tagli di peso < 1 , STOP

Il minimo albero ricoprente

Dati

$G(V, E)$ grafo connesso, $c_e \geq 0$ costo associato ad ogni spigolo $e \in E$

Problema

Trovare un albero ricoprente di costo minimo

Algoritmi combinatori noti

Prim e Kruskal

Formulazione

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se lo spigolo } ij \text{ appartiene all'albero ric.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\min \sum_{ij \in E} c_{ij} x_{ij}$$

st

$$\sum_{ij \in E} x_{ij} = n - 1 \quad (1)$$

$$\sum_{ij \in E(S)} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \text{per ogni } S \subseteq V, \text{ t.c. } 2 \leq |S| \leq n - 1 \quad (2)$$

$$x \geq 0$$

Osservazioni

1. I bound $x \leq 1$ sono implicati dai vincoli (2)
2. La matrice dei vincoli non è TUM

Difatti, consideriamo un grafo con 5 nodi e i seguenti vincoli di tipo (2):

$$x_{12} + x_{23} \leq 2$$

$$x_{12} + x_{45} + x_{15} \leq 3$$

$$x_{23} + x_{45} + x_{34} \leq 3$$

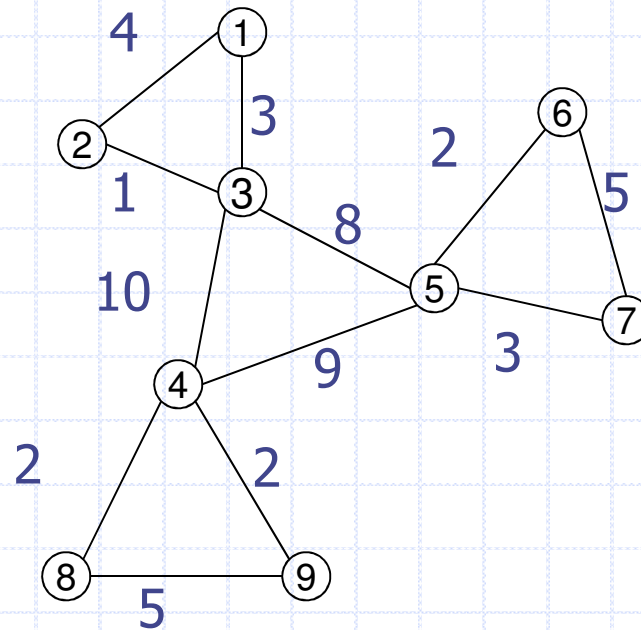
ad essi corrisponde
la matrice

x_{12}	x_{23}	x_{45}
1	1	0
1	0	1
0	1	1

che ha determinante -2 e, quindi, non è TUM.

Nonostante la matrice dei coefficienti non sia TUM, il rilassamento lineare fornisce una soluzione intera. Tuttavia, il numero dei vincoli cresce esponenzialmente con il numero dei nodi del grafo.

Esempio



$$\min 4x_{12} + 3x_{13} + 1x_{23} + 10x_{34} + 8x_{35} + 9x_{45} + 2x_{48} + 2x_{49} + 5x_{89} + 2x_{56} + 3x_{57} + 5x_{67}$$

st

$$x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{35} + x_{45} + x_{48} + x_{49} + x_{89} + x_{56} + x_{57} + x_{67} = 8$$

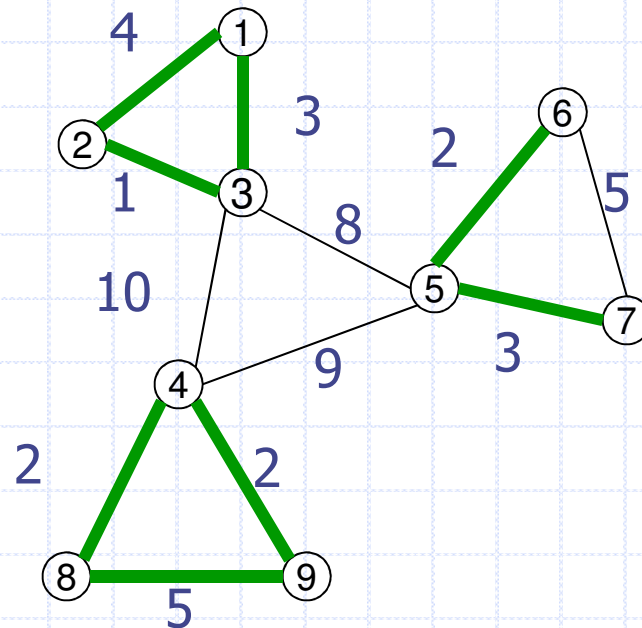
$$x \leq 1$$

$$x \geq 0$$

Soluzione n. 1

Valore della soluzione: 22

Gli archi verdi di maggiore spessore corrispondono a variabili poste a 1



Separazione

Domanda

Esiste un vincolo della famiglia

$$\sum_{ij \in E(S)} x_{ij} \leq |S| - 1 \text{ per ogni } S, \text{ tale che } 2 \leq |S| \leq n - 1$$

violato dalla soluzione ottima corrente? **SI**

Ad esempio, $x_{48} + x_{49} + x_{89} \leq 2$ che viene aggiunto alla formulazione corrente

$$\min 4x_{12} + 3x_{13} + 1x_{23} + 10x_{34} + 8x_{35} + 9x_{45} + 2x_{48} + 2x_{49} + 5x_{89} + 2x_{56} + 3x_{57} + 5x_{67}$$

st

$$x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{35} + x_{45} + x_{48} + x_{49} + x_{89} + x_{56} + x_{57} + x_{67} = 8$$

$$x_{48} + x_{49} + x_{89} \leq 2$$

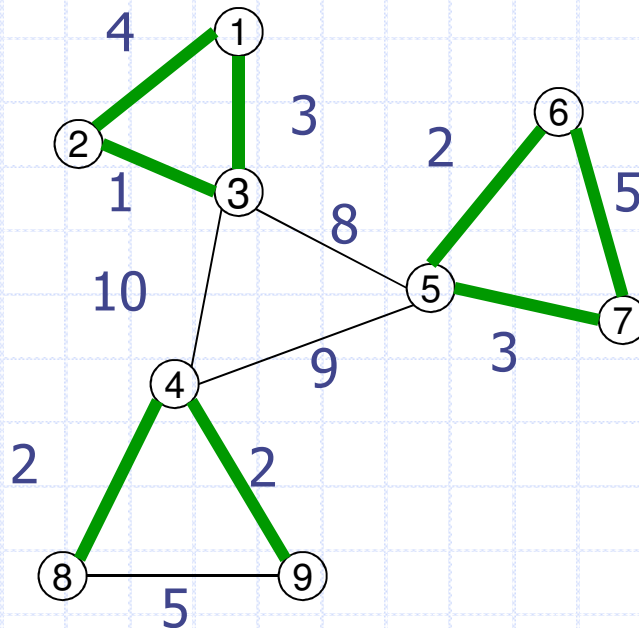
$$x \leq 1$$

$$x \geq 0$$

Soluzione n. 2

Valore della soluzione: 22

Gli archi verdi di maggiore spessore corrispondono a variabili poste a 1



Separazione

Domanda

Esiste un vincolo della famiglia

$$\sum_{ij \in E(S)} x_{ij} \leq |S| - 1 \text{ per ogni } S, \text{ tale che } 2 \leq |S| \leq n - 1$$

violato dalla soluzione ottima corrente? **SI**

Ad esempio, $x_{56} + x_{57} + x_{67} \leq 2$

che viene aggiunto alla formulazione corrente

$$\min 4x_{12} + 3x_{13} + 1x_{23} + 10x_{34} + 8x_{35} + 9x_{45} + 2x_{48} + 2x_{49} + 5x_{89} + 2x_{56} + 3x_{57} + 5x_{67}$$

st

$$x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{35} + x_{45} + x_{48} + x_{49} + x_{89} + x_{56} + x_{57} + x_{67} = 8$$

$$x_{48} + x_{49} + x_{89} \leq 2$$

$$x_{56} + x_{57} + x_{67} \leq 2$$

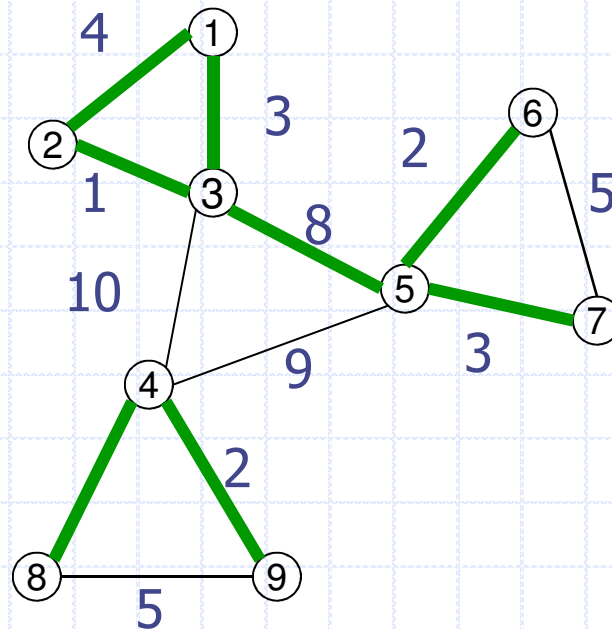
$$x \leq 1$$

$$x \geq 0$$

Soluzione n.3

Valore della soluzione: 25

Gli archi verdi di maggiore spessore corrispondono a variabili poste a 1



Separazione

Domanda

Esiste un vincolo della famiglia

$$\sum_{ij \in E(S)} x_{ij} \leq |S| - 1 \text{ per ogni } S, \text{ tale che } 2 \leq |S| \leq n - 1$$

violato dalla soluzione ottima corrente? **SI**

Ad esempio, $x_{12} + x_{13} + x_{23} \leq 2$

che viene aggiunto alla formulazione corrente

$$\min 4x_{12} + 3x_{13} + 1x_{23} + 10x_{34} + 8x_{35} + 9x_{45} + 2x_{48} + 2x_{49} + 5x_{89} + 2x_{56} + 3x_{57} + 5x_{67}$$

st

$$x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{35} + x_{45} + x_{48} + x_{49} + x_{89} + x_{56} + x_{57} + x_{67} = 8$$

$$x_{48} + x_{49} + x_{89} \leq 2$$

$$x_{56} + x_{57} + x_{67} \leq 2$$

$$x_{12} + x_{13} + x_{23} \leq 2$$

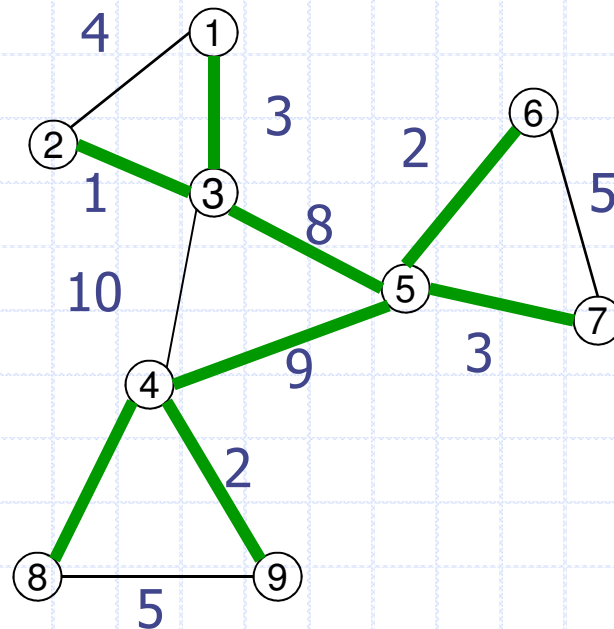
$$x \leq 1$$

$$x \geq 0$$

Soluzione n.4

Valore della soluzione: 30

Gli archi verdi di maggiore spessore corrispondono a variabili poste a 1



Separazione

Domanda

Esiste un vincolo della famiglia

$$\sum_{ij \in E(S)} x_{ij} \leq |S| - 1 \text{ per ogni } S, \text{ tale che } 2 \leq |S| \leq n - 1$$

violato dalla soluzione ottima corrente? **NO**

La soluzione trovata è ottima per il rilassamento ed è anche INTERA, ovvero ottima per PL- $\{0,1\}$

Formulazione "cutset"

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se lo spigolo } ij \text{ appartiene all'albero ric.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\min c^T x$$

st

$$\sum_{i \in S, j \in \partial(S)} x_{ij} \geq 1 \quad \text{per ogni } S, \text{ tale che } 1 \leq |S| \leq n-1$$

$$\sum_{ij \in E} x_{ij} = n-1$$

$$x \geq 0$$

La formulazione “cutset” non è intera

Difatti, la formulazione

$$\min 4x_{12} + 3x_{13} + 1x_{23} + 10x_{34} + 8x_{35} + 9x_{45} + 2x_{48} + 2x_{49} + 5x_{89} + 2x_{56} + 3x_{57} + 5x_{67}$$

st

$$x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{35} + x_{45} + x_{48} + x_{49} + x_{89} + x_{56} + x_{57} + x_{67} = 8$$

$$x_{34} + x_{35} \geq 1$$

$$x_{34} + x_{45} \geq 1$$

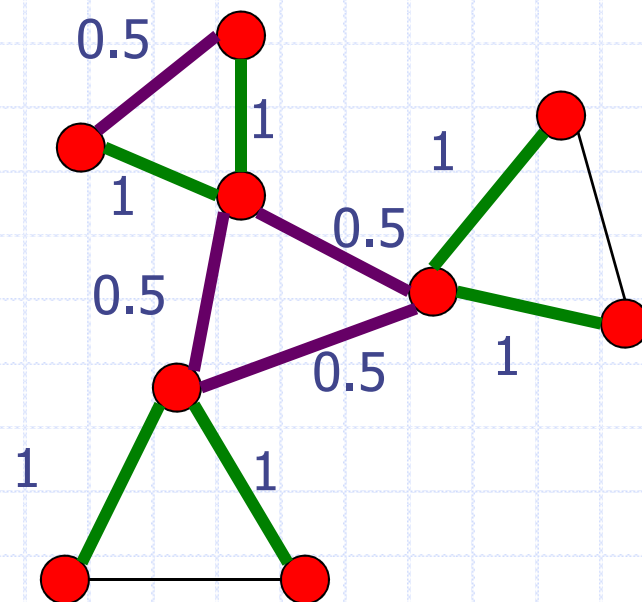
$$x_{35} + x_{45} \geq 1$$

$$x \leq 1$$

$$x \geq 0$$

Soluzione frazionaria

ammette la seguente soluzione ottima, di valore 28.5



che NON ha tagli violati !!!!

Problema di separazione

Qual è il problema che consente di separare i vincoli

$$\sum_{ij \in E(S)} x_{ij} \leq |S| - 1 \text{ per ogni } S, \text{ tale che } 2 \leq |S| \leq n - 1$$

“subtour elimination constraints”?

Variabili decisionali

$$z_j = 1 \text{ se } j \in S$$

$$z_j = 0 \text{ altrimenti}$$

Problema di separazione

Un vincolo subtour è violato dalla soluzione x_{LP}^* se e solo se esiste un S tale che

$$\sum_{ij \in E(S)} x_{ij}^* - |S| > -1$$

ovvero se

$$\max_{S \subset V} \left\{ \sum_{ij \in E(S)} x_{ij}^* - |S| \right\} = \max_{z \in \{0,1\}} \left\{ \sum_{ij \in E} x_{ij}^* z_i z_j - \sum_{j \in V} z_j \right\} > -1$$

Osservazioni

1. Il problema

$$\max_{z \in \{0,1\}} \left\{ \sum_{ij \in E} x_{ij}^* z_i z_j - \sum_{j \in V} z_j \right\} > -1$$

ha soluzione ottima di valore 0 con $z = 0$.

Per ovviare a ciò si deve fissare $z_k=1$, per $k = 1, \dots, |V|$.

In questo modo si risponde alla domanda se esiste un vincolo di tipo subtour violato che contiene il vertice k .

2. Il problema non è un problema di PL- $\{0,1\}$. Si deve effettuare una linearizzazione.

Linearizzazione

Introduciamo la variabile

$$w_{ij} = z_i z_j$$

Il problema diventa

$$\max \sum_{ij \in E} x_{ij}^* w_{ij} - \sum_{j \in V} z_j$$

st

$$w_{ij} - z_i \leq 0$$

$$w_{ij} - z_j \leq 0$$

per ogni $ij \in E$

$$w_{ij} - z_i - z_j \geq -1$$

$$z_k = 1$$

$$z \in \{0,1\}^{|V|}, w \in \{0,1\}^{|E|}$$

Linearizzazione

I vincoli $w_{ij} - z_i - z_j \geq -1$ possono essere eliminati in quanto i coefficienti delle w_{ij} in f.o. sono ≥ 0 ovvero,

$$w_{ij} = \min\{z_i, z_j\}$$

che implica che il vincolo è sempre soddisfatto in quanto

$$\min\{z_i, z_j\} \geq z_i + z_j - 1$$

Eliminando questi vincoli osserviamo anche che la matrice dei coefficienti è TUM. Pertanto, può essere rimossa anche la stipula di interezza.

In conclusione è “facile” il problema di separazione dei subtour elimination constraint.

Esempio

Consideriamo la sol. n. 3 del problema precedente e scriviamo il problema di separazione:

$$\max \quad 1 \cdot w_{12} + 1 \cdot w_{13} + 1 \cdot w_{23} + 1 \cdot w_{35} + 1 \cdot w_{56} + 1 \cdot w_{57} + 1 \cdot w_{48} + 1 \cdot w_{49} -$$

$$z_1 - z_2 - z_3 - z_4 - z_5 - z_6 - z_7 - z_8 - z_9$$

st

$$w_{12} - z_1 \leq 0 \quad w_{12} - z_2 \leq 0$$

$$w_{13} - z_1 \leq 0 \quad w_{13} - z_3 \leq 0$$

$$w_{23} - z_2 \leq 0 \quad w_{23} - z_3 \leq 0$$

$$w_{34} - z_3 \leq 0 \quad w_{34} - z_4 \leq 0$$

$$w_{35} - z_3 \leq 0 \quad w_{35} - z_5 \leq 0$$

$$w_{45} - z_4 \leq 0 \quad w_{45} - z_5 \leq 0$$

$$w_{48} - z_4 \leq 0 \quad w_{48} - z_8 \leq 0$$

$$w_{49} - z_4 \leq 0 \quad w_{49} - z_9 \leq 0$$

$$w_{89} - z_8 \leq 0 \quad w_{89} - z_9 \leq 0$$

$$w_{56} - z_5 \leq 0 \quad w_{56} - z_6 \leq 0$$

$$w_{57} - z_5 \leq 0 \quad w_{57} - z_7 \leq 0$$

$$w_{67} - z_7 \leq 0 \quad w_{68} - z_8 \leq 0$$

$$z_1 = 1$$

$$0 \leq w \leq 1, 0 \leq z \leq 1$$

La soluzione ottima del problema vale 0 ed ha le seguenti variabili diverse da 0

$$w_{12} = 1; w_{13} = 1; w_{23} = 1; z_1 = 1; z_2 = 1; z_3 = 1$$

Esse descrivono il subtour constraint

$$x_{12} + x_{13} + x_{23} \leq 2$$