

# Ottimizzazione Combinatoria 2

A.A. 2004/05

Stefano Smriglio  
Dipartimento di Informatica  
Università di L'Aquila  
smriglio@di.univaq.it

+

+

## Prerequisiti

- Fondamenti teorici della Programmazione Lineare (PL),
- teoremi dell'alternativa, dualità nella PL;
- Metodo del simplesso, implementazione "Tableau";
- Algoritmo branch-and-bound;
- problema del cammino minimo;
- problema del minimo taglio;

+

+

+

## Indipendenza lineare ed affine

- un vettore  $y \in \mathbb{R}^n$  è combinazione lineare dei vettori  $\{x^1, \dots, x^k\}$  se esistono  $k$  moltiplicatori reali  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  tali che  $y = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$ . Una combinazione lineare con  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, k$  è detta *conica*. Una combinazione lineare con  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  si dice *affine*. Una combinazione conica ed affine si dice *convessa*
- Un sottoinsieme  $X \subset \mathbb{R}^n$  si dice *linearmente (affinemente) indipendente* se nessun vettore di  $X$  può essere espresso come combinazione lineare (affine) degli altri.

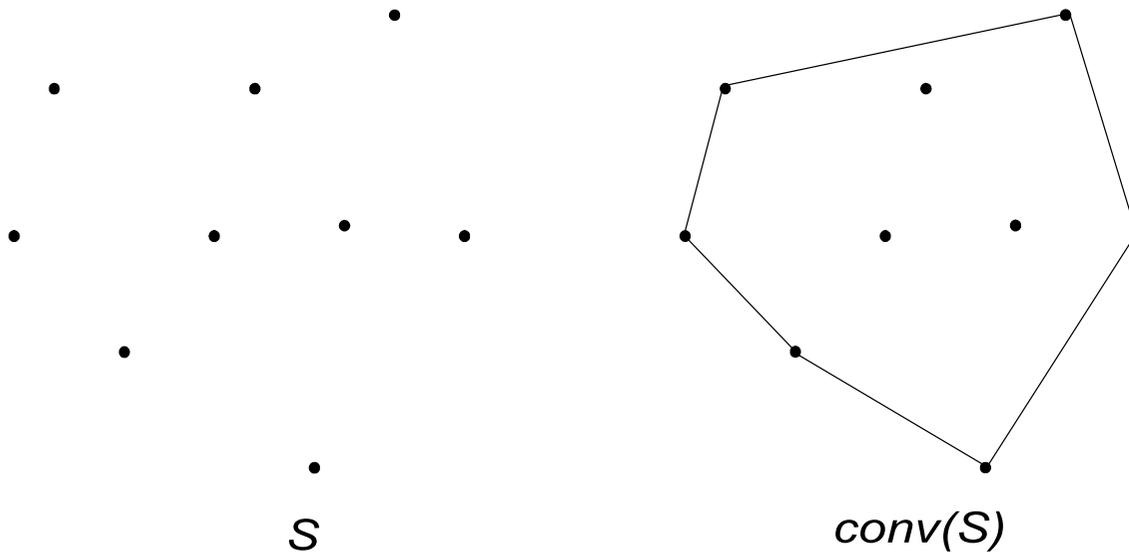
+

+

+

## Involucro convesso

Dato un insieme  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , l'*inviluppo convesso* (*conico*)  $conv(S)$  ( $cone(S)$ ) di  $S$  è l'insieme di tutti i vettori ottenibili per combinazione convessa di sottoinsiemi finiti di vettori di  $S$ .



- Un insieme  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  è convesso se e solo se  $X = conv(X)$ ;  $conv(S)$  è il più piccolo insieme convesso che contiene  $S$

+

4

+

+

## Ottimizzare su $\text{conv}(S)$

**Proposizione 1** Sia  $S = \{x^1, \dots, x^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme finito e sia  $w \in \mathbb{R}^n$ . Allora,  $\max\{w^T x : x \in S\} = \max\{w^T y : y \in \text{conv}(S)\}$

*Dimostrazione.* Sia  $y = \lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_k x^k$ , con  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  moltiplicatori non negativi tali che  $\sum_{i=1, \dots, k} \lambda_i = 1$ . Sia inoltre  $r = \operatorname{argmax}_{i=1, \dots, k} (w^T x^i)$ . Allora,

$$w^T y = \lambda_1 w^T x^1 + \dots + \lambda_k w^T x^k \leq \lambda_1 w^T x^r + \dots + \lambda_k w^T x^r = w^T x^r$$

□

+

+

+

## Appartenenza a $\text{conv}(S)$

Dato un insieme  $S = \{x^1, \dots, x^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ , è possibile certificare facilmente se un vettore  $y \in \mathbb{R}^n$  appartiene a  $\text{conv}(S)$ . Infatti, ciò è equivalente a determinare se il sistema lineare:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \lambda_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot x^i &= y \\ \lambda_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, k \end{aligned} \tag{1}$$

ammette soluzione oppure no.

+

+

+

## Separazione

**Proposizione 2** Sia  $S = \{x^1, \dots, x^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme finito e sia  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \text{conv}(S)$ . Allora esiste una disuguaglianza  $\alpha^T x \leq \beta$  che separa  $v$  da  $\text{conv}(S)$ , cioè risulta  $\alpha^T y \leq \beta$  per ogni  $y \in \text{conv}(S)$ , ma  $\alpha^T v > \beta$

*Dimostrazione.* Per ipotesi, il sistema (1) non ammette soluzione. Quindi, per il lemma di Farkas, esiste  $z \in \mathbb{R}$  e  $p \in \mathbb{R}^n$  tali che

$$\begin{aligned} p^T x^i + z &\leq 0, & i = 1, \dots, k \\ p^T v + z &> 0. \end{aligned}$$

Si ponga  $\alpha = p$  e  $\beta = -z$ . Essendo  $\alpha^T x^i \leq \beta$ , per  $i = 1, \dots, k$ , la Proposizione 1 implica  $\alpha^T y \leq \beta$ , per ogni  $y \in \text{conv}(S)$ .  $\square$

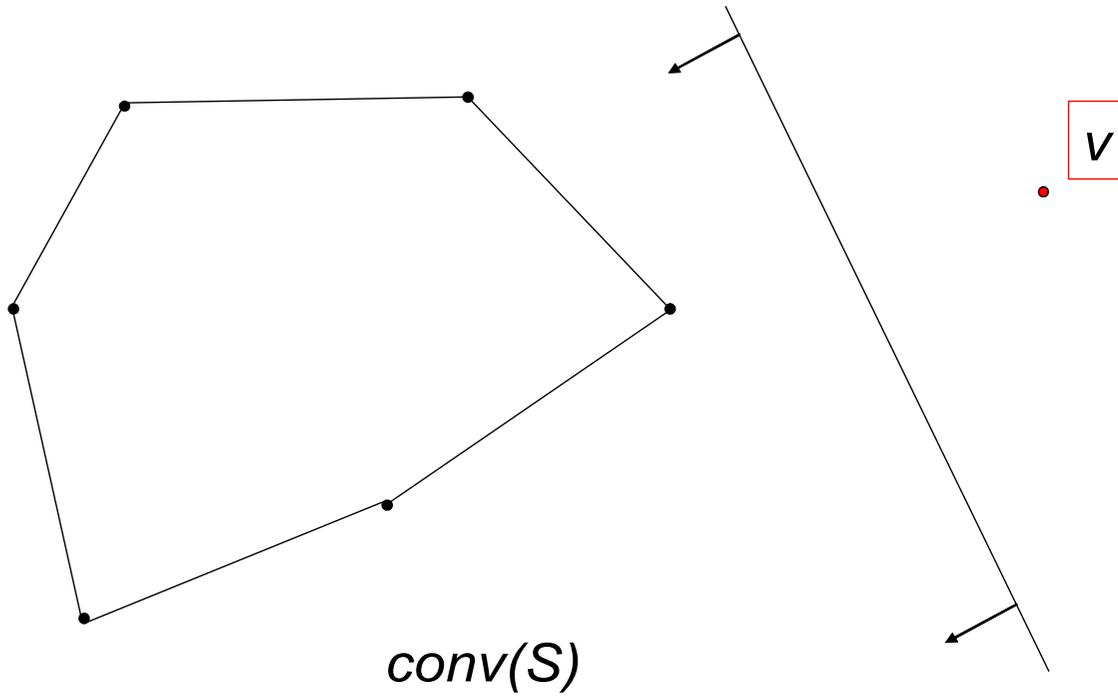
+

7

+

+

# Separazione



+

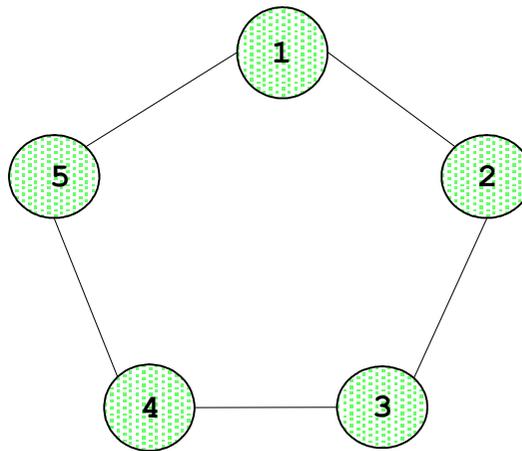
8

+

+

## Esempio

Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^5$  la collezione di tutti gli insiemi stabili massimali del seguente grafo:



$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

+

+

+

## Esempio

Verifichiamo se il vettore  $y^T = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$  appartiene a  $\text{conv}(S)$ .

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$$

+

+

+

## Esempio

il sistema

$$z] \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1$$

$$p_1] \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1/2$$

$$p_2] \quad \lambda_3 + \lambda_4 = 1/2$$

$$p_3] \quad \lambda_1 + \lambda_5 = 1/2$$

$$p_4] \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 1/2$$

$$p_5] \quad \lambda_4 + \lambda_5 = 1/2$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$$

non ammette soluzione

+

+

+

## Esempio

il sistema alternativo

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + 2z > 0$$

$$p_1 + p_3 + z \leq 0$$

$$p_1 + p_4 + z \leq 0$$

$$p_2 + p_4 + z \leq 0$$

$$p_2 + p_5 + z \leq 0$$

$$p_3 + p_5 + z \leq 0$$

ammette la soluzione  $(1, 1, 1, 1, 1, z = -2)$

quindi, la disuguaglianza  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$  separa  $y$  da  $\text{conv}(S)$

+

+

+

## Poliedri

- l'insieme delle soluzioni di un sistema finito di disuguaglianze lineari  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  è detto *poliedro*. Un poliedro limitato si dice *politopo*.
- La dimensione  $\dim(P)$  di un poliedro  $P$  è il massimo numero di punti affinementemente indipendenti in  $P$  (*rango affine*) meno uno.
- Un punto  $y \in P$  è detto *vertice* di  $P$  se non può essere ottenuto come combinazione convessa di altri punti di  $P$ .
- Un poliedro ha un insieme finito di vertici; Un poliedro si dice *puntato* se ha almeno un vertice; ogni politopo è puntato.

+

+

+

## Disuguaglianze valide

- Una disuguaglianza  $\alpha x \leq \beta$  è *valida* per un poliedro  $P$  se  $P \subseteq \{x : \alpha x \leq \beta\}$ ;
- una disuguaglianza  $\alpha x \leq \beta$  valida per  $P$  definisce una *faccia*  $F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha x = \beta\}$  di  $P$ ; l'insieme  $\{x \in \mathbb{R}^n : \alpha x = \beta\}$  è detto *iperpiano di supporto* di  $F$ ;
- Data una faccia  $F$  di  $P$  risulta ovviamente  $\dim(F) \leq \dim(P)$ . Se  $\dim(F) = \dim(P)$ , il poliedro  $P$  è contenuto in  $F$  ed  $F$  è detta *faccia impropria*. Una faccia  $F$  ha dimensione 0 se e solo se è un vertice di  $P$ .

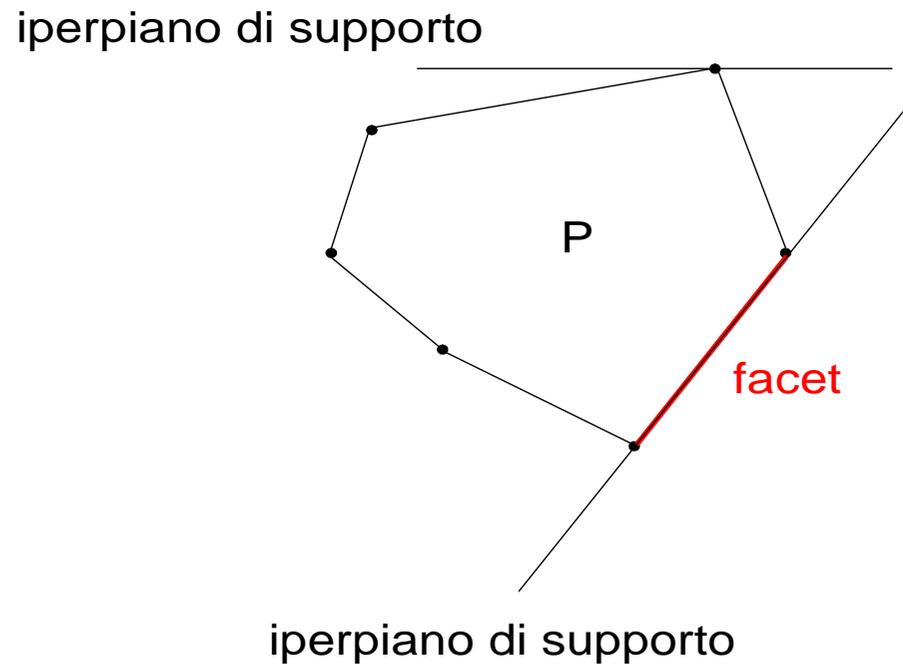
+

+

+

## Facce massimali

Una faccia  $F$  di  $P$  per cui  $\dim(F) = \dim(P) - 1$ ,  $F$  è detta *faccia massimale* o *facet*;



+

## Caratterizzazione di un politopo

**Teorema 1** *Un politopo coincide con l'involucro convesso dei suoi vertici*

**Dimostrazione.** Sia  $P$  un politopo non vuoto e siano  $v^1, \dots, v^k$  i suoi vertici ( $P$  è puntato). Ovviamente  $\{v^1, \dots, v^k\} \subseteq P$ . Supponiamo che esista  $u \in P \setminus \text{conv}(\{v^1, \dots, v^k\})$ . Allora, per la Proposizione 2, esiste una disuguaglianza  $\alpha x \leq \beta$  che separa  $u$  da  $\text{conv}(\{v^1, \dots, v^k\})$ . Sia  $\beta^* = \max\{\alpha^T x : x \in P\}$ . Essendo  $u \in P$  risulta  $\beta^* > \beta$ . Ma allora la faccia  $F = \{x \in P : \alpha^T x = \beta^*\}$  non contiene vertici di  $P$ , contraddizione.  $\square$

+

+

## Caratterizzazione di un politopo

**Teorema 2** *Un insieme  $P$  è un politopo se e solo se esiste un insieme finito  $V$  tale che  $P$  coincide con l'involucro convesso di  $V$ .*

**Dimostrazione.** Una direzione deriva immediatamente dal Teorema 1. Per l'altra direzione, sia  $V = \{v^1, \dots, v^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme finito e sia  $P = \text{conv}(V)$ .

Definiamo un politopo che contiene tutte le disuguaglianze valide per  $P$  e, quindi, ne scegliamo un insieme finito utilizzando il Teorema 1.

Si consideri l'insieme  $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  definito da

$$\{(\alpha, \beta) : \alpha \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}, -e \leq \alpha \leq e, -1 \leq \beta \leq 1, \alpha^T v \leq \beta \text{ per ogni } v \in V\}$$

+

+

+

## Dimostrazione

Essendo  $V$  finito, l'insieme  $Q = \{(\alpha, \beta) : \alpha \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}, -e \leq \alpha \leq e, -1 \leq \beta \leq 1, \alpha^T v \leq \beta \text{ per ogni } v \in V\}$  è un politopo.

Quindi, per il Teorema 1, coincide con l'involucro convesso dei suoi vertici  $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix}$ .

Dimostriamo che il sistema lineare

$$\begin{aligned} a_1^T x &\leq b_1 \\ a_2^T x &\leq b_2 \\ &\dots \\ a_m^T x &\leq b_m \end{aligned} \tag{2}$$

definisce  $P$ .

+

+

+

## Dimostrazione

**1.**  $P$  è contenuto nella soluzione del sistema (2).

Sia  $\bar{x} \in P$ . Allora,  $\bar{x} = \lambda_1 v^1 + \dots + \lambda_k v^k$ , con  $\sum_{r=1, \dots, k} \lambda_r = 1$ ,  $\lambda_r \geq 0$ .  
Quindi, per ogni  $i = 1, \dots, m$  risulta

$$a_i^T \bar{x} = \lambda_1 a_i^T v^1 + \dots + \lambda_k a_i^T v^k \leq \lambda_1 b_i + \dots + \lambda_k b_i = b_i \quad (3)$$

+

+

+

## Dimostrazione

2. Ogni soluzione del sistema (2) è contenuta in  $P$ .

Sia  $\bar{x}$  una soluzione del sistema (2) e si assuma  $\bar{x} \notin P$ . Allora, per la Proposizione 2, esiste una disuguaglianza  $w^T x \leq t$  che separa  $\bar{x}$  da  $P$ . Si può inoltre assumere  $-e \leq w \leq e$ ,  $-1 \leq t \leq 1$  e, cioè,  $\begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix} \in Q$  (questo è sempre ottenibile dividendo  $w$  e  $t$  per una costante).

Ciò implica che  $\begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix}$  può essere scritto come combinazione convessa dei vertici di  $Q$ ,  $\begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \dots, \gamma_m \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix}$ , con  $\sum_{r=1, \dots, m} \gamma_r = 1$ ,  $\gamma_r \geq 0$ .

Quindi,

$$w^T \bar{x} = \gamma_1 a_1^T \bar{x} + \dots + \gamma_m a_m^T \bar{x} \leq \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_m b_m = t \quad (4)$$

ma questa è una contraddizione a  $w^T \bar{x} > t$ . Quindi,  $\bar{x} \in P$ . □

+

## Dominanza fra disuguaglianze

- Date due disuguaglianze  $ax \leq \alpha$  e  $cx \leq \gamma$ , si dice che la prima *domina* la seconda se esiste un  $\lambda > 0$  tale che  $a = \lambda c$  e  $\gamma \leq \lambda \alpha$ . Inoltre risulta  $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq \alpha\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \leq \gamma\}$ . Se gli insiemi di soluzioni coincidono le disuguaglianze si dicono equivalenti;

**Proposizione 3** *Una disuguaglianza  $ax \leq \alpha$  è valida per un poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  se e solo se è equivalente o dominata da una disuguaglianza della forma  $u^T Ax \leq u^T b$ , con  $u \geq 0_m$ , ovvero da una combinazione conica delle disuguaglianze del sistema.*

## Rappresentazione minimale di un poliedro

- la rappresentazione esterna  $Ax \leq b$  di un poliedro non è univocamente determinata. Infatti, è sempre possibile aggiungere alla rappresentazione nuove disuguaglianze valide per  $P$ , senza modificare l'insieme delle sue soluzioni.
- la rappresentazione  $Ax \leq b$  di  $P$  è *minimale* se rimuovendo una qualsiasi disuguaglianza si ottiene un sistema  $A'x \leq b'$  tale che  $P \subset \{x \in \mathbb{R}^n : A'x \leq b'\}$ ;

**Proposizione 4** *La rappresentazione  $Ax \leq b$  di un poliedro  $P$  di dimensione  $n$  è minimale se e solo se ciascuna disuguaglianza del sistema definisce una faccia massimale di  $P$ . Inoltre, ogni faccia massimale di  $P$  è definita da una disuguaglianza del sistema  $Ax \leq b$ .*

+

+

## Programmazione Lineare $\{0, 1\}$

Dato un insieme di vettori  $S \subseteq \{0, 1\}^n$  (*regione ammissibile*) ed un vettore di costo  $c \in \mathbb{R}^n$ , determinare una soluzione ammissibile  $x^* \in S$  tale da minimizzare la funzione lineare  $c^T x$ .

### PL01

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ & x \in S \end{aligned}$$

**Commento 5** Essendo  $S \subseteq \{0, 1\}^n$ ,  $S$  ha un numero finito di elementi

**Commento 6** Non ci sono ipotesi sulla struttura di  $S$ .

+

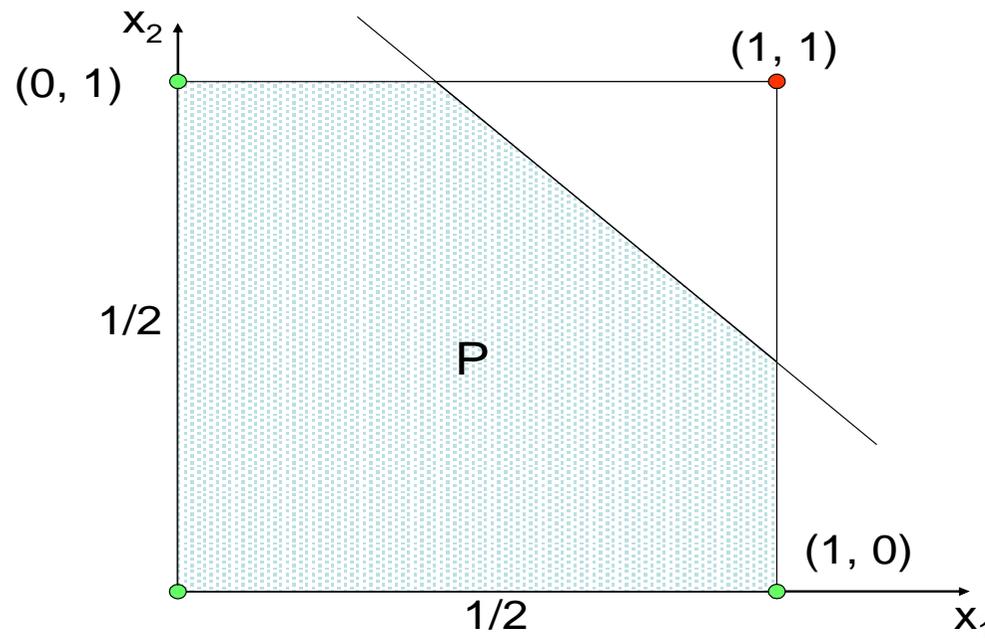
+

+

## Formulazioni lineari

**Definizione 7** Un poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  è una formulazione lineare del problema  $(S, c)$  se e solo se  $S = P \cap \{0, 1\}^n$

Esempio:  $S = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$



+

+

+

## Esistenza di una formulazione Lineare

**Teorema 3** *Un problema  $(S, c)$  di PL01 ammette sempre la formulazione lineare  $\text{conv}(S)$  con la proprietà che  $x \in S$  se e solo se  $x$  è un vertice di  $\text{conv}(S)$ .*

**Dimostrazione.** Poiché l'insieme  $S$  è finito, il teorema 2 implica che  $\text{conv}(S)$  è un politopo e, per il Teorema 1, i suoi vertici appartengono ad  $S$ . Inoltre, tutti i vettori in  $\{0, 1\}^n$  sono vertici del cubo unitario  $\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, \text{ per } i = 1, \dots, n\}$  e nessun vettore  $x \in \{0, 1\}^n$  è esprimibile come combinazione convessa degli altri. Quindi,

- tutti e soli i punti di  $S$  sono vertici di  $\text{conv}(S)$ ;
- tutti i punti  $x \in \{0, 1\}^n \setminus S$  non appartengono a  $\text{conv}(S)$

□

+

+

+

## Rilassamento lineare

Sia  $P$  una formulazione lineare del problema  $(S, c)$  di PL01. Questo può essere riscritto come

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & x \in P \\ & x \in \{0, 1\}^n \end{aligned}$$

Il problema di PL

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & x \in P \end{aligned}$$

è detto *rilassamento lineare* di  $(S, c)$ .

+

+

+

## Lower bound

La soluzione ottima  $\hat{x}$  del rilassamento lineare fornisce una limitazione inferiore (per un problema di minimo) del valore ottimo intero:

$$c^T \hat{x} \leq \min\{c^T x : x \in S\}$$

- Se  $\hat{x} \in S$ , allora è anche soluzione ottima di  $(S, c)$ . Inoltre, se  $\hat{x} \notin S$  ma esiste una soluzione  $\bar{x} \in S$  per cui  $c^T \hat{x} = c^T \bar{x}$ , allora  $\hat{x}$  è ottima di  $(S, c)$ .
- Dato un problema  $(S, c)$  di PL01 è possibile definire diverse formulazioni lineari di  $(S, c)$ . Diverse formulazioni producono diversi lower bound del valore ottimo.

+

+

+

## Gerarchia di formulazioni

Dato un problema  $(S, c)$  di PL01, siano  $P_1$  e  $P_2$  due formulazioni lineari distinte di  $(S, c)$ .

- consideriamo  $P_1$  migliore di  $P_2$  se  $\min_{x \in P_1} c^T x > \min_{x \in P_2} c^T x$
- è importante definire un criterio di confronto delle formulazioni indipendente dalla funzione obiettivo;

**Definizione 8** *Si dice che  $P_1$  è migliore di  $P_2$  se e solo se  $P_1 \subset P_2$       $\square$*

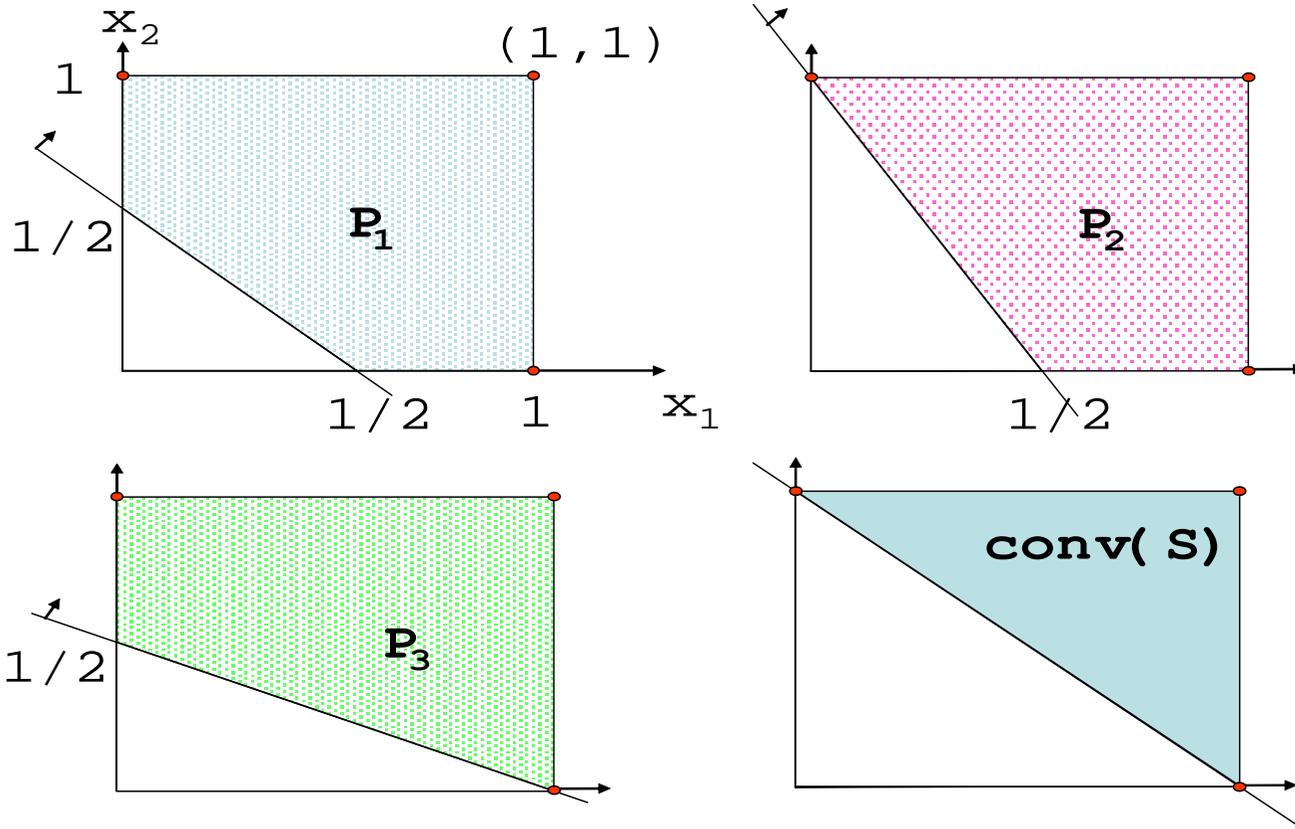
- Quindi, la migliore formulazione possibile è rappresentata dal poliedro contenuto in tutti i poliedri contenenti  $S$ , cioè da  $\text{conv}(S)$

+

+

+

## Gerarchia di formulazioni



$P_2$  migliore di  $P_1$ ;     $P_3$  migliore di  $P_1$ ;     $P_2$  e  $P_3$  non confrontabili

$\text{conv}(S)$  formulazione "ottima"

+

+

+

## **Lezione 11/05/2005**

+

+

+

## PL01 e Programmazione Lineare

Per il Teorema 3, un generico problema di PL01 può essere sempre trasformato in un problema di PL nella forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & x \in \text{conv}(S) \end{aligned} \tag{5}$$

Infatti, poiché i vertici di  $\text{conv}(S)$  coincidono con i vettori di  $S$ , risolvere il problema  $(S, c)$  equivale ad individuare un vertice ottimo del problema di PL

+

+

+

## Generazione completa della formulazione ottima

Esistono diversi metodi per ottenere  $\text{conv}(S)$  a partire da una generica formulazione di un problema di PL01. Fra questi, la procedura di Chvátal-Gomory ha importanti conseguenze algoritmiche.

**Definizione 9** *Data una formulazione  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  del problema  $(S, c)$  si dice taglio di Chvátal-Gomory (CG) prodotto da  $P$  la disuguaglianza*

$$\lfloor u^T A \rfloor x \leq \lfloor u^T b \rfloor \quad (6)$$

*per ogni possibile vettore  $u \geq 0_m$  di moltiplicatori non-negativi*

+

+

+

## Validità

**Teorema 4** *La disuguaglianza (6) è valida per  $\text{conv}(S)$ .*

**Dimostrazione.** Dobbiamo dimostrare che la disuguaglianza  $\lfloor u^T A \rfloor x \leq \lfloor u^T b \rfloor$  è soddisfatta da ogni vettore  $y \in S$ . Naturalmente, ogni vettore  $y \in S$  soddisfa la disuguaglianza  $u^T A x \leq u^T b$ . Inoltre, poiché  $y \geq 0_m$ , risulta  $\lfloor u^T A \rfloor y \leq u^T A y \leq u^T b$ . Essendo  $\lfloor u^T A \rfloor y$  un numero intero, abbiamo che  $\lfloor u^T A \rfloor y \leq \lfloor u^T b \rfloor$  □

Si osservi che la disuguaglianza (6) non è, in generale, valida per  $P$ .

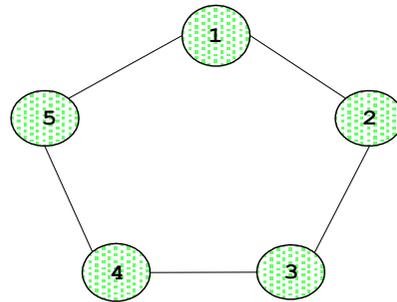
+

+

+

## Esempio

Consideriamo il grafo  $G$  (*5 – hole*):



e la “formulazione archi” del problema del massimo insieme stabile:

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 + x_3 \leq 1$$

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

$$x_4 + x_5 \leq 1$$

$$x_1 + x_5 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

+

+

+

## Esempio

Sommando tutte le disuguaglianze che definiscono il poliedro, ciascuna moltiplicata per  $1/2$  si ottiene:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 5/2$$

e, applicando l'arrotondamento,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$$

soddisfatta da tutti gli insiemi stabili di  $G$ .

+

+

+

## Prima chiusura di Chvátal

I tagli CG costituiscono una famiglia infinita di disuguaglianze valide per  $P$ . Quindi, non è immediato concludere che l'insieme

$$P^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, [u^T A]x \leq [u^T b], u \geq 0_m, u \in \mathbb{R}^m\}$$

è un poliedro. In realtà, si dimostra che sono un sottoinsieme finito  $Dx \leq d$  dei tagli CG è sufficiente alla descrizione di  $P^1$ . Cioè,

$$P^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, Dx \leq d\} = \{A^1 x \leq b^1\}$$

Tale poliedro è detto *Prima chiusura di Chvátal*.

**Commento 10** Essendo  $P^1 \subseteq P$ ,  $P^1$  rappresenta una formulazione del problema  $(S, c)$  migliore di  $P$ .

+

+

+

## Chiusura $i$ -ma di una formulazione

In generale, data una certa formulazione iniziale  $P$  di un problema  $(S, c)$ , non tutte le disuguaglianze valide per  $\text{conv}(S)$  sono ottenibili come tagli di Chvátal-Gomory.

Tuttavia, essendo  $P^1$  un poliedro, è possibile definire la sua prima chiusura  $P^2$ , con la proprietà che  $\text{conv}(S) \subseteq P^2 \subseteq P^1 \subseteq P$ .  $P^2$  è detta *seconda chiusura* di  $P$ .

Generalizzando, possiamo dare la seguente

**Definizione 11** *Un poliedro  $P^i = \{x \in \mathbb{R}^n : A^i x \leq b^i\}$  ottenuto da  $P$  mediante  $i \geq 1$  applicazioni dell'operazione di chiusura, è detto *chiusura  $i$ -ma della formulazione  $P$* .*

+

+

+

## Generazione completa della formulazione ottima

Nel costruire la  $i$ -ma chiusura di  $P$  si ottiene quindi una sequenza di formulazioni  $P^1, P^2, \dots, P^i$  del problema  $(S, c)$  tali che  $P \supseteq P^1 \supseteq P^2 \supseteq \dots \supseteq P^i$

Sussiste il seguente

**Teorema 5** *Per ogni problema  $(S, c)$  di PL01 ed ogni formulazione lineare  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  di  $(S, c)$  esiste un intero finito  $t$  tale che la formulazione ottima  $\text{conv}(S)$  coincide con la chiusura  $t$ -ma  $P^t = \{x \in \mathbb{R}^n : A^t x \leq b^t\}$  di  $P$ .  $\square$*

+

+

+

## Rango di Chvátal di una disuguaglianza

Consideriamo una disuguaglianza  $\alpha^T x \leq \beta$  che induce una faccia massimale di  $\text{conv}(S)$  (quindi indispensabile per la rappresentazione di  $\text{conv}(S)$ ). Per il teorema (5), deve esistere un indice minimo  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  tale che  $\alpha^T x \leq \beta$  appartenga alla  $k$ -ma chiusura di  $P$ .

Il valore  $k$  è detto *rango di Chvátal* della disuguaglianza rispetto alla formulazione  $P$ .

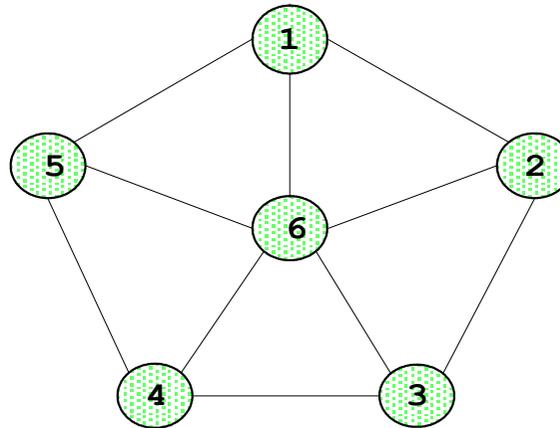
+

+

+

## Esercizio

Dato il grafo  $G$ :



Sia  $P$  la “formulazione archi” del corrispondente problema di massimo insieme stabile. Calcolare il rango di Chvátal delle seguenti disuguaglianze:

1.  $x_1 + x_2 + x_6 \leq 1$

2.  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 \leq 2$

+

+

+

## **Lezione 19/05/2005**

+

## Metodo del piano di taglio

- I metodi di generazione completa della formulazione ottima non sono praticamente applicabili a causa del numero, in generale molto grande, di disuguaglianze necessarie.
- Al contrario, il metodo del piano di taglio ha l'obiettivo di generare una formulazione  $\bar{P}$  di  $(S, c)$  tale che la soluzione ottima del problema  $\min\{c^T x : x \in \bar{P}\}$  appartenga ad  $S$ .

+

+

## Piani di taglio

Sia  $P$  una formulazione di un problema  $(S, c)$  di PL01 e sia  $x^*$  la soluzione del corrispondente rilassamento lineare.

**Definizione 12** *Una disuguaglianza  $\alpha^T x \leq \beta$  è detta taglio rispetto a  $x^*$  se:*

(i)  $\alpha^T x \leq \beta$  per ogni  $x \in S$

(ii)  $\alpha^T x^* > \beta$

*Il problema di determinare un taglio è detto problema di separazione di  $x^*$  da  $S$ .*

+

+

+

## Esempio

Consideriamo ancora la “formulazione archi” del problema del massimo insieme stabile sul 5 – *hole*:

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 + x_3 \leq 1$$

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

$$x_4 + x_5 \leq 1$$

$$x_1 + x_5 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

ed il vertice frazionario  $x^* = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$ . La disuguaglianza  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$  è un taglio rispetto ad  $x^*$ .

+

+

+

## Metodo del piano di taglio

Il metodo del piano di taglio consiste nella generazione iterativa di tagli, cioè nella soluzione di una sequenza di problemi di separazione.

---

**begin**

calcola la soluzione ottima  $x^*$  del rilassamento lineare  $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0_n\}$

**while**  $x^*$  non intero **do**

**begin**

risolve il problema di separazione di  $x^*$  da  $S$ ;

aggiunge la disuguaglianza ottenuta  $\alpha^T x + x_{n+1} = \beta$  alla formulazione corrente;

$n := n + 1$ ;

calcola la soluzione ottima  $x^*$  del rilassamento lineare corrente (Simplexso duale);

**end**

**end**

---

La convergenza del metodo in un numero finito di passi dipende dall'algoritmo che risolve il problema di separazione.

+

+

+

## Tagli di Gomory

Particolari tagli di CG ottenuti sfruttando il tableau ottimo (associato alla soluzione  $x^*$ ) del rilassamento lineare corrente.

	$-c_B^T B^{-1}b$	$0 \dots 0$	$c_N^T - c_B^T B^{-1}N$
$x_{B(1)}$ $\vdots$ $x_{B(m)}$	$B^{-1}b = \bar{b}$	$I$	$B^{-1}N = \bar{N}$

Se  $x^*$  è intera, allora è anche ottima. Altrimenti, sia  $x_h^*$  una sua componente frazionaria, in base su una certa riga  $t$  del tableau ottimo ( $B(t) = h$ ). L'equazione (generatrice) corrispondente, valida per  $P$ , è:

$$x_h + \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j = (B^{-1}b)_t = \bar{b}_t \quad (7)$$

+

+

+

## Tagli di Gomory

Il taglio di CG ottenuto ponendo  $u^T = e_t^T B^{-1}$ :

$$x_h + \sum_{j \in N} [\bar{a}_{ij}] x_j \leq [\bar{b}_t] \quad (8)$$

è detto *taglio di Gomory*. Questo è violato da  $x^*$ . Infatti, essendo  $x_j = 0$  per ogni  $j \in N$ , risulta:

$$(x_h + \sum_{j \in N} [\bar{a}_{ij}] x_j)_{x=x^*} = x_h^* = \bar{b}_t > [\bar{b}_t] \quad (9)$$

+

+

+

## Aggiornamento del tableau

La disuguaglianza (9) viene trasformata in forma standard, aggiungendo la nuova variabile slack  $s \geq 0$ :

$$x_h + \sum_{j \in N} [\bar{a}_{ij}] x_j + s = [\bar{b}_t] \quad (10)$$

sottraendo a questa l'equazione generatrice  $x_h + \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_t$ , si ottiene:

$$\sum_{j \in N} ([\bar{a}_{ij}] - \bar{a}_{ij}) x_j + s = [\bar{b}_t] - \bar{b}_t \quad (11)$$

Si osservi che nel taglio così ottenuto non compaiono variabili in base.

+

+

+

### Struttura del nuovo tableau

$-c_B^T B^{-1}b$	$0 \dots 0$	$c_N^T - c_B^T B^{-1}N \geq 0$	$0$
$\bar{b}_t$	$0 \dots 1 \dots 0$	$\bar{a}_{ij}$	$0$ $\vdots$ $0$
$[\bar{b}_t] - b_t$	$0 \dots 0 \dots 0$	$[\bar{a}_{ij}] - a_{ij}$	$1$

Si osservi che tale struttura mantiene l'ammissibilità duale, rendendo possibile l'applicazione del metodo del semplice duale.

+

+

+

## **Lezione 24/05/2005**

+

## Considerazioni computazionali

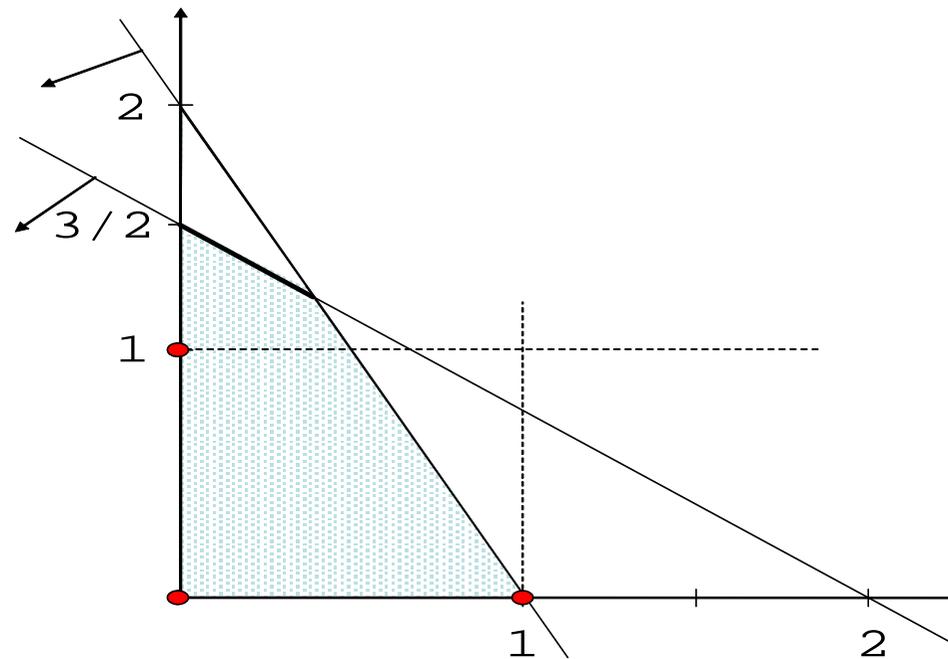
- l'utilizzo dei tagli di Gomory nel metodo del piano di taglio ne garantisce la convergenza in un numero finito (in genere elevatissimo) di passi;
- fra i possibili tagli violati contenuti nel tableau ottimo, può essere vantaggioso aggiungere il taglio più “profondo”: si sceglie la riga generatrice che massimizza  $b_t - \lfloor b_t \rfloor$ .
- in alternativa è possibile aggiungere tutti i tagli per cui  $b_t - \lfloor b_t \rfloor \geq \epsilon$ , con  $\epsilon$  parametro fissato (ad. es.  $\epsilon = 0.01$ )

+

+

## Esempio 1

$$\begin{aligned} \min & -x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + s_1 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 &= 2 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



+

+

+

## Esempio 1

tableau iniziale:

0	-1	-1	0	0
6	3	4	1	0
2	<b>2</b>	1	0	1

iterazione 1:

1	0	-1/2	0	1
3	0	<b>5/2</b>	1	-3
1	1	1/2	0	1/2

iterazione 2:

8/5	0	0	1/5	2/5
6/5	0	1	2/5	-6/5
2/5	1	0	-1/5	11/10

+

+

+

## Esempio 1

Da cui  $x_1^* = 2/5$ ,  $x_2^* = 6/5$ ,  $z^* = -8/5$ .

Consideriamo il taglio di Gomory associato alla prima riga del tableau ottimo ( $t = 1$ ,  $h = 2$ ):

$$x_2 + \lfloor 2/5 \rfloor s_1 + \lfloor -6/5 \rfloor s_2 \leq \lfloor 6/5 \rfloor$$

cioè,

$$x_2 - 2s_2 \leq 1$$

da cui, ponendo in forma standard (con l'aggiunta di una nuova variabile slack  $s_3 \geq 0$ ):

$$x_2 - 2s_2 + s_3 = 1$$

+

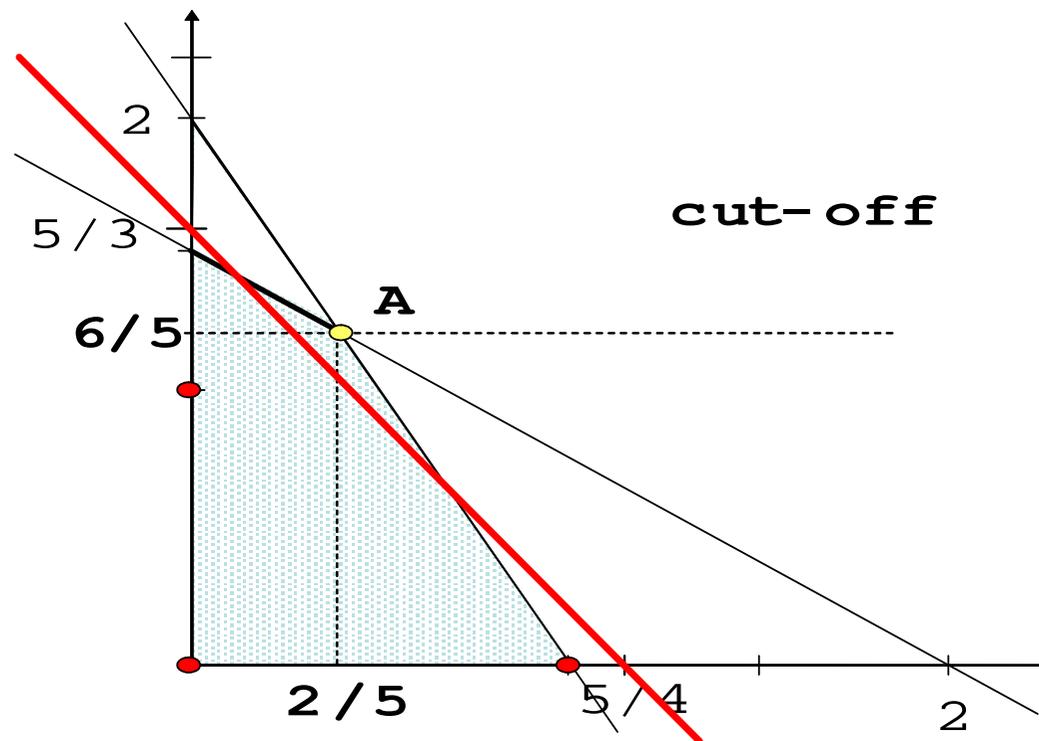
+

+

## Esempio 1

Sostituendo l'espressione di  $s_2$  in funzione delle variabili originali:

$$4x_1 + 3x_2 \leq 5$$



+

+

+

## Esempio 1

sottraendo al taglio  $x_2 - 2s_2 + s_3 = 1$  l'equazione generatrice  $x_2 + 2/5s_1 + -6/5s_2 = 6/5$  otteniamo

$$-2/5s_1 - 4/5s_2 + s_3 = -1/5$$

da cui il nuovo tableau:

8/5	0	0	1/5	2/5	0
6/5	0	1	2/5	-6/5	0
2/5	1	0	-1/5	11/10	0
-1/5	0	0	<b>-2/5</b>	-4/5	1

+

+

+

## Esempio 1

Con un solo pivot del simplesso duale si ottiene:

3/2	0	0	0	0	1/2
1	0	1	0	-2	1
1/2	1	0	0	3/2	-1/2
1/2	0	0	1	2	-5/2

quindi:  $x_1^* = 1/2$ ,  $x_2^* = 1$ ,  $s_1 = 1/2$

e l'equazione generatrice è:  $x_2 + 3/2s_2 - 1/2s_3 = 1/2$ , da cui si ottiene il nuovo taglio:  $x_2 + s_2 - s_3 \leq 0$

+

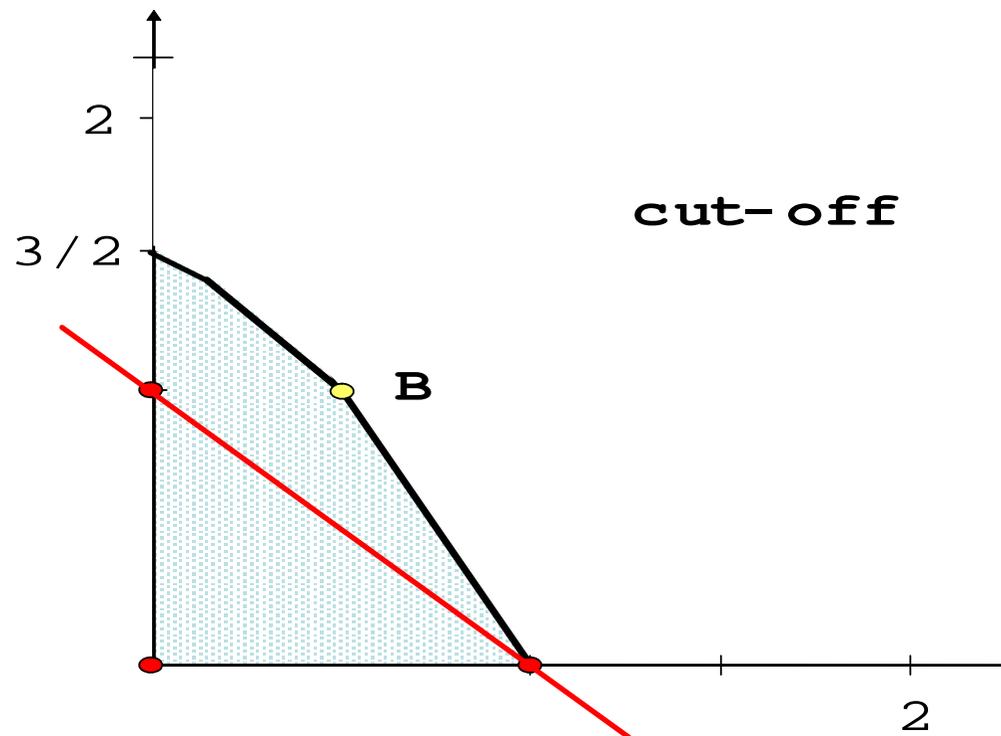
+

+

## Esempio 1

Sostituendo l'espressione di  $s_2, s_3$  in funzione delle variabili originali:

$$x_1 + x_2 \leq 1$$



+

+

+

## Esempio 1

il nuovo tableau è:

3/2	0	0	0	0	1/2	0
1	0	1	0	-2	1	0
1/2	1	0	0	3/2	-1/2	0
1/2	0	0	1	2	<b>-5/2</b>	0
-1	0	0	0	1	-1	1

da cui, con un singolo pivot si ottiene il tableau ottimo:

1	0	0	0	1/2	0	1/2
0	0	1	0	-1	0	1
1	1	0	0	1	0	-1/2
3	0	0	1	-1/2	0	-5/2
1	0	0	0	-1	1	-1

con soluzione intera  $x_1^* = 1$ ,  $x_2^* = 0$

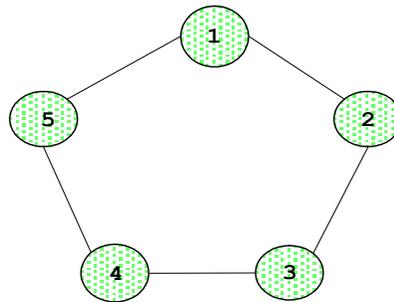
+

+

+

## Esempio

Consideriamo ancora la “formulazione archi” del problema del massimo insieme stabile sul 5 – *hole*:



$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 + x_3 \leq 1$$

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

$$x_4 + x_5 \leq 1$$

$$x_1 + x_5 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

+

+

+

## Esempio 2

Poniamo il problema in forma standard:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \\ & x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_2 + x_3 + s_2 = 1 \\ & x_3 + x_4 + s_3 = 1 \\ & x_4 + x_5 + s_4 = 1 \\ & x_1 + x_5 + s_5 = 1 \\ & x_j, s_i \geq 0 \end{aligned}$$

+

+

+

## Esempio 2

tableau iniziale:

0	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0
1	<b>1</b>	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1

iterazione 1:

1	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	<b>1</b>	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	-1	0	0	1	-1	0	0	0	1

+

+

+

## Esempio 2

iterazione 2:

2	0	1	0	-1	-1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	-1	0	<b>1</b>	0	0	-1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	-1	0	0	1	-1	0	0	0	1

iterazione 3:

2	0	0	0	0	-1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	-1	0	1	0	0	-1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1	-1	1	0
0	0	-1	0	0	<b>1</b>	-1	0	0	0	1

+

+

+

## Esempio 2

iterazione 4:

2	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	-1	0	1	0	0	-1	1	0	0
1	0	<b>2</b>	0	0	0	1	1	-1	1	-1
0	0	-1	0	0	1	-1	0	0	0	1

iterazione 5:

$5/2$	0	0	0	0	0	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
$1/2$	1	0	0	0	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
$1/2$	0	0	1	0	0	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
$1/2$	0	0	0	1	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$
$1/2$	0	1	0	0	0	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$
$1/2$	0	0	0	0	1	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$

+

+

+

## Esempio 2

ogni riga del tableau ottimo:

5/2	0	0	0	0	0	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
1/2	1	0	0	0	0	1/2	-1/2	1/2	-1/2	1/2
1/2	0	0	1	0	0	-1/2	1/2	1/2	-1/2	1/2
1/2	0	0	0	1	0	1/2	-1/2	1/2	1/2	-1/2
1/2	0	1	0	0	0	1/2	1/2	-1/2	1/2	-1/2
1/2	0	0	0	0	1	-1/2	1/2	-1/2	1/2	1/2

genera un taglio di Gomory. Ad esempio, con  $h = 1, t = 1$ :

$$x_1 - s_2 - s_4 \leq 0$$

esprimendo il taglio nelle variabili originali si ottiene:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$$

+

## Svantaggi dei tagli di Gomory

- il taglio generato dipende dalla formulazione  $P$ ;
- il taglio generato è indipendente da  $\text{conv}(S)$ ;

In generale, l'obiettivo del metodo del piano di taglio è quello di individuare un vertice  $x^*$  di  $P$  che sia anche vertice di  $\text{conv}(S)$ . Ciò equivale a generare  $n$  iperpiani contenenti  $x^*$  definiti da disuguaglianze valide per  $\text{conv}(S)$  le cui normali siano linearmente indipendenti.

Quindi, un requisito significativo dei tagli generati è che abbiano intersezione non vuota con  $\text{conv}(S)$  (faccia di  $\text{conv}(S)$ ).

Al contrario, i tagli di Gomory non garantiscono tale proprietà (non tutte le facce di  $\text{conv}(S)$  appartengono alla prima chiusura di Chvátal).

## Approccio poliedrale

**Definizione 13** *Data una famiglia  $\mathcal{F}$  di disuguaglianze lineari ed un vettore  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , il problema di separazione associato a  $\mathcal{F}$  consiste nel determinare una disuguaglianza in  $\mathcal{F}$  violata da  $\bar{x}$  o certificare che non ne esistono*

Un paradigma che permette di superare gli svantaggi dei tagli di Gomory è così definito:

- (i) **fase descrittiva.** Dato un problema  $(S, c)$  di PL01, individuare una collezione di famiglie di disuguaglianze lineari che definiscono facce massimali di  $\text{conv}(S)$ ;
- (ii) **fase di separazione.** Per ciascuna famiglia descritta nella fase (i), definire un algoritmo per la soluzione del problema di separazione associato a tale famiglia;

+

+

## Cammino minimo

Dato un grafo  $G = (V, E)$  non orientato, sia  $l_{uv} > 0$  il peso, reale e positivo del generico arco  $uv$ , e siano  $s$  e  $t$  due nodi di  $V$ . Si consideri il problema di determinare un sottoinsieme  $T$  di  $E$  di peso minimo tale da contenere un cammino da  $s$  a  $t$ .

Essendo i pesi positivi,  $T$  coincide con l'insieme degli archi di un cammino minimo da  $s$  a  $t$ .

Si consideri la seguente formulazione lineare del problema:

$$Q_{st} = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} : \sum_{(u,v) \in K} x_{uv} \geq 1, K \text{ st - taglio}, 0 \leq x_{uv} \leq 1, uv \in E\}$$

dove un taglio  $(X, V \setminus X)$  è un st - taglio se  $s \in X$  e  $t \in V \setminus X$ .

Si dimostra che  $Q_{st}$  coincide con  $\text{conv}(S)$ .

+

+

+

## Cammino minimo

Approccio poliedrale:

fase (i): individua la famiglia  $\sum_{(u,v) \in K} x_{uv} \geq 1, K$  st - taglio

fase (ii): il problema di separazione equivale ad un problema di minimo taglio (massimo flusso).

Sia  $\bar{x}$  il punto da separare. Attribuiamo i pesi  $\bar{x}_{uv}$  agli archi di  $G$  e risolviamo il corrispondente problema di taglio minimo.

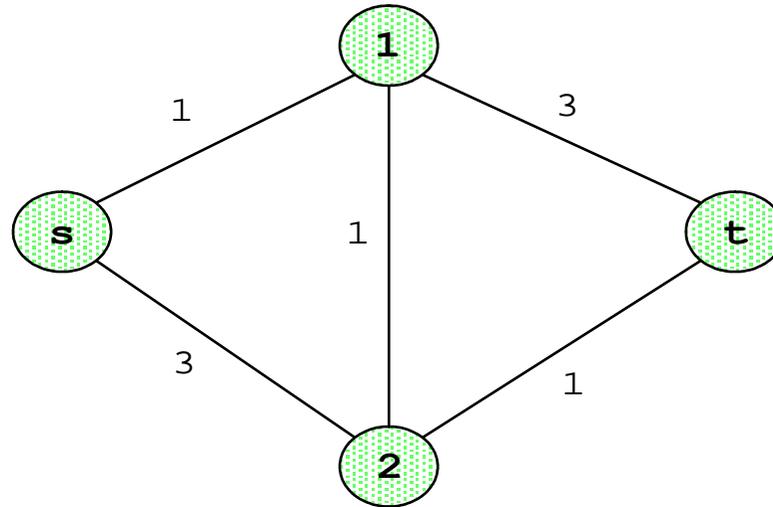
Se il taglio minimo  $K^*$  ha un valore  $l^* < 1$  allora l'algoritmo restituisce  $K^*$ , altrimenti non esistono disuguaglianze della famiglia violate da  $\bar{x}$ .

+

+

+

## Esempio



formulazione iniziale:

$$\min x_{s1} + 3x_{s2} + 3x_{1t} + x_{12} + x_{2t}$$

$$x_{s1} + x_{s2} \geq 1$$

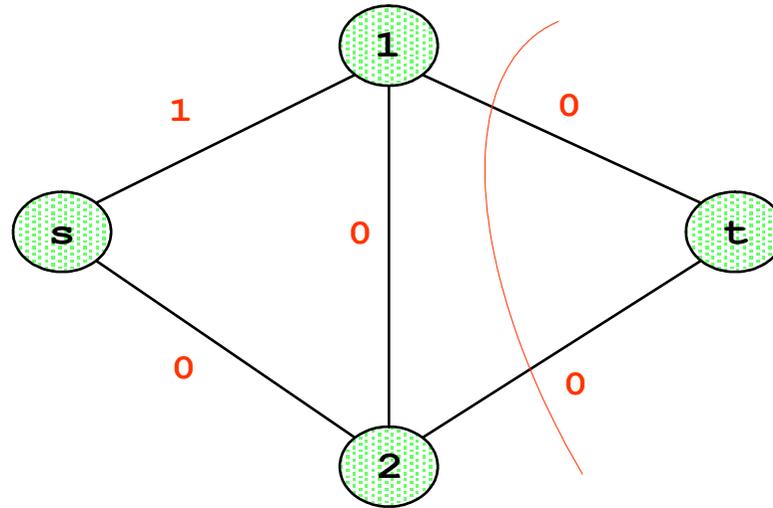
$$0 \leq x_{uv} \leq 1 \quad \forall uv \in E$$

+

+

+

## Esempio



soluzione corrente  $x_{s1}^* = 1$ , tutte le altre variabili a zero, di valore 1.

Separazione: il taglio  $(\{s, 1, 2\}, \{t\})$  ha peso 0: si aggiunge il taglio

$$x_{1t} + x_{2t} \geq 1$$

+

+

+

## Esempio

Formulazione corrente:

$$x_{s1} + x_{s2} \geq 1$$

$$x_{1t} + x_{2t} \geq 1$$

$$0 \leq x_{s1} \leq 1$$

$$0 \leq x_{s2} \leq 1$$

$$0 \leq x_{1t} \leq 1$$

$$0 \leq x_{12} \leq 1$$

$$0 \leq x_{2t} \leq 1$$

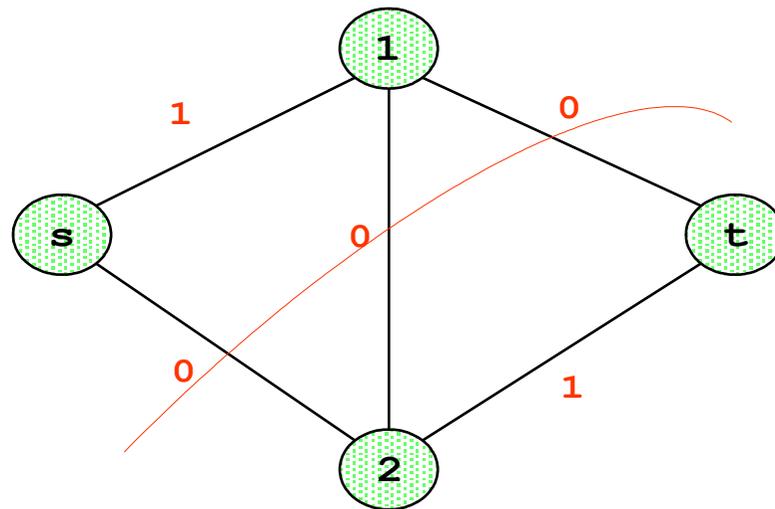
con soluzione  $x_{s1}^* = 1$ ,  $x_{2t}^* = 1$ , tutte le altre variabili a zero, di valore 2.

+

+

+

## Esempio



Separazione: il taglio  $(\{s, 1\}, \{2, t\})$  ha peso 0: si aggiunge il taglio

$$x_{s2} + x_{12} + x_{1t} \geq 1$$

+

+

+

## Esempio

Formulazione corrente:

$$\begin{aligned}x_{s1} + x_{s2} &\geq 1 \\x_{1t} + x_{2t} &\geq 1 \\x_{s2} + x_{12} + x_{1t} &\geq 1 \\0 &\leq x_{s1} \leq 1 \\0 &\leq x_{s2} \leq 1 \\0 &\leq x_{1t} \leq 1 \\0 &\leq x_{12} \leq 1 \\0 &\leq x_{2t} \leq 1\end{aligned}$$

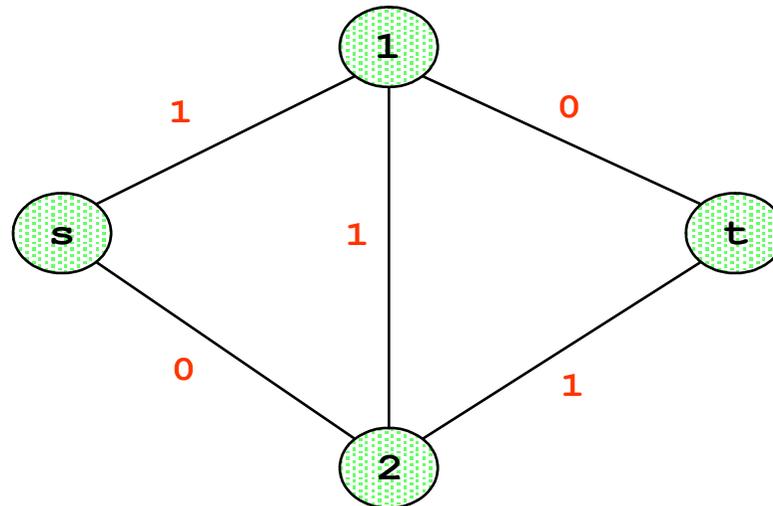
con soluzione  $x_{s1}^* = 1$ ,  $x_{12}^* = 1$ ,  $x_{2t}^* = 1$ , tutte le altre variabili a zero, di valore 3.

+

+

+

## Esempio



tutti i tagli sono soddisfatti: la soluzione è ammissibile, e, quindi, ottima.

**Commento 14** *il vertice  $x^*$  è definito dalle disuguaglianze della formulazione corrente e da  $x_{1t} \geq 0$ ,  $x_{s2} \geq 0$*

+

+

+

## Problema del commesso viaggiatore

Sia dato un insieme  $V$  di città ed un costo di viaggio  $c_e$  fra ciascuna coppia  $e = \{u, v\} \in V \times V$ . Un *tour* è un circuito che passa esattamente una volta in ogni città di  $V$ . Il *problema del commesso viaggiatore* (TSP) consiste nel determinare un tour di costo minimo.

Formulazione lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{e \in V \times V} c_e x_e \\ & \sum_{e \in \delta(u)} x_e = 2, \quad \forall u \in V \\ & \sum_{e \in (X, V \setminus X)} x_e \geq 2, \quad \forall X \subseteq V \\ & 0 \leq x_e \leq 1 \quad \forall e \in V \times V \end{aligned}$$

in cui  $\delta(u)$  è l'insieme degli archi incidenti in  $u$ .

+

+

+

## problema del commesso viaggiatore

Approccio poliedrale:

fase (i): individua la famiglia  $\sum_{e \in (X, V \setminus X)} x_e \geq 2$  per ogni taglio  $(X, V \setminus X)$

fase (ii): il problema di separazione equivale ad un problema di minimo taglio (massimo flusso).

Sia  $\bar{x}$  il punto da separare. Attribuiamo i pesi  $\bar{x}_{uv}$  agli archi di  $G$  e risolviamo il corrispondente problema di taglio minimo.

Se il taglio minimo  $(X^*, V \setminus X^*)$  ha un valore  $l^* < 2$  allora l'algoritmo restituisce  $(X^*, V \setminus X^*)$ , altrimenti non esistono disuguaglianze della famiglia violate da  $\bar{x}$ .

+

+

+

## Esempio

matrice dei costi:

	1	2	3	4	5	6
1	-	5	7	4	1	1
2		-	2	3	4	6
3			-	1	4	5
4				-	5	7
5					-	2
6						-

+

+

+

## Esempio

Formulazione iniziale:

$$\begin{aligned} \min \quad & 5x_{12} + 7x_{13} + 4x_{14} + x_{15} + x_{16} + 2x_{23} + 3x_{24} + 4x_{25} + 6x_{26} \\ & + x_{34} + 4x_{35} + 5x_{36} + 5x_{45} + 7x_{46} + 2x_{56} \end{aligned}$$

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 2$$

$$x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 2$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 2$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{46} = 2$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{56} = 2$$

$$x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} = 2$$

$$0 \leq x_e \leq 1$$

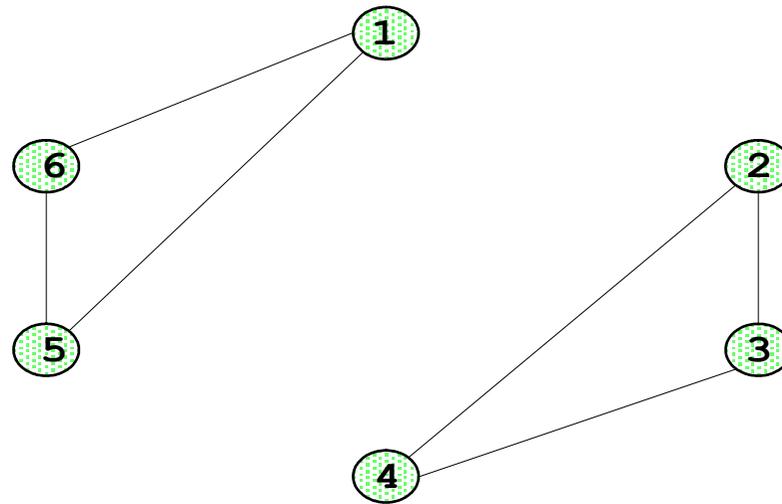
ha soluzione  $x_{15}^* = x_{16}^* = x_{23}^* = x_{24}^* = x_{34}^* = x_{56}^* = 1$ ; tutte le altre variabili sono a zero.

+

+

+

## Esempio



Separazione: il taglio  $(\{1, 5, 6\}, \{2, 3, 4\})$  ha costo zero. Si aggiunge il taglio:  $x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{25} + x_{26} + x_{35} + x_{36} + x_{45} + x_{46} \geq 2$

la soluzione diventa  $x_{14}^* = x_{16}^* = x_{23}^* = x_{25}^* = x_{34}^* = x_{56}^* = 1$ ; tutte le altre variabili sono a zero.

Non esistono tagli violati e  $x^*$  corrisponde ad un tour ottimo, di costo 14.

+

+

+

## Massimo insieme stabile

Dato un grafo non orientato  $G = (V, E)$  pesato sui nodi, un insieme stabile è un insieme di nodi di  $G$  mutuamente non adiacenti. Il problema consiste nel calcolare un insieme stabile di peso massimo.

$$\max \sum_{j \in V} x_j$$

$$x_i + x_j \leq 1 \quad \forall ij \in E$$

$$x_j \in \{0, 1\}^n$$

Denotiamo  $STAB(G)$  l'involucro convesso dei vettori di incidenza degli insiemi stabili di  $G$ .

+

+

+

## disuguaglianze clique

**Definizione 15** *Un sottografo completo di  $G$  è detto clique.*

La disuguaglianza

$$\sum_{j \in C} x_j \leq 1 \tag{12}$$

è chiaramente valida per  $STAB(G)$ .

**Teorema 6** *Sia  $C$  una clique di  $G$ . La disuguaglianza (12) è una faccia massimale di  $STAB(G)$  se e solo se  $C$  è massimale*

+

## Dimostrazione

*Sufficienza.* La dimensione di  $STAB(G)$  è pari a  $|V|$ . Quindi, per dimostrare il teorema occorre determinare  $|V|$  punti affinementemente indipendenti che soddisfano (12). Sia  $C$  una clique massimale. Per ogni  $v \in C$  consideriamo il punto corrispondente all'insieme stabile che contiene solo  $v$ . Per ogni  $v \notin C$ , scegliamo un nodo  $w \in C$  non adiacente a  $v$ . Dato che  $C$  è massimale, il nodo  $w$  deve esistere. Prendiamo quindi il punto corrispondente all'insieme stabile che contiene  $v$  e  $w$ . Tutti i punti considerati sono affinementemente indipendenti e soddisfano (12) all'uguaglianza, da cui segue la tesi

*Necessità.* Se  $C$  non è massimale, esiste una clique  $C'$  tale che  $c \subset C'$ . Ma allora la disuguaglianza associata a  $C'$  domina quella associata a  $C$ .  
□

+

+

## Buchi dispari

**Definizione 16** *Un ciclo di  $G$  privo di corde è detto buco.*

Sia  $H$  un buco di  $G$  con un numero dispari di nodi. La disuguaglianza

$$\sum_{j \in H} x_j \leq \frac{|H| - 1}{2} \quad (13)$$

definisce una faccia massimale di  $\text{conv}(S \cap \{x_j = 0, \text{ per ogni } j \notin H\})$

+

+

+

## Separazione dei buchi dispari

Sia  $\bar{x}$  un punto frazionario. Definiamo  $z_{ij} = 1 - \bar{x}_i - \bar{x}_j$ . Sommando i contributi su un generico buco  $H$ :

$$\sum_{ij \in H} z_{ij} = |H| - 2 \sum_{j \in H} \bar{x}_j$$

ricavando  $\sum_{j \in H} \bar{x}_j$  e sostituendo in 16:

$$\sum_{j \in H} \bar{x}_j = 1/2(|H| - \sum_{ij \in H} z_{ij}) \leq \frac{|H| - 1}{2} \quad (14)$$

Quindi, La condizione espressa dalla disuguaglianza 16 è violata da  $\bar{x}$  se:

$$\sum_{ij \in H} z_{ij} < |H| - 2 \frac{|H| - 1}{2} = 1 \quad (15)$$

+

## Separazione dei buchi dispari

Il problema di separazione associato alle disuguaglianze buco dispari consiste quindi nel determinare un buco dispari di peso minimo, in cui il peso di ciascun arco  $ij \in E$  è dato da  $z_{ij}$ :

$$\sum_{ij \in H} z_{ij} < 1 \quad (16)$$

Il problema viene ricondotto ad un problema di cammino minimo. Costruiamo un grafo  $G'$  associando a ciascun nodo  $j \in V$  di  $G$  una coppia di nodi  $j, j'$  ed inserendo per ciascun arco  $ij \in E$  una coppia di archi  $ij'$  e  $i'j$  in  $G'$ .

Un buco dispari in  $G$  corrisponde ad un cammino fra una coppia di nodi omologhi  $j, j'$  in  $G'$ .

+

+

## Esercizio

Calcolare un bound per il seguente problema:

$$\max x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 + x_3 \leq 1$$

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

$$x_1 + x_5 \leq 1$$

$$x_4 + x_5 \leq 1$$

$$x_1 + x_6 \leq 1$$

$$x_2 + x_6 \leq 1$$

$$x_3 + x_6 \leq 1$$

$$x_4 + x_6 \leq 1$$

$$x_5 + x_6 \leq 1$$

$$2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \leq 4$$

$$x_j \in \{0, 1\}$$

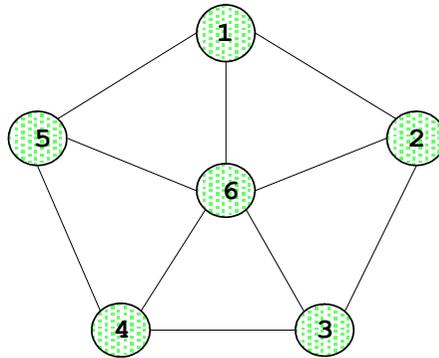
+

+

+

## Esempio

Consideriamo il grafo



e formulazione “clique”:  $x_j \in \{0, 1\}$

$$x_1 + x_2 + x_6 \leq 1$$

$$x_2 + x_3 + x_6 \leq 1$$

$$x_3 + x_4 + x_6 \leq 1$$

$$x_4 + x_5 + x_6 \leq 1$$

$$x_1 + x_5 + x_6 \leq 1$$

+

+

+

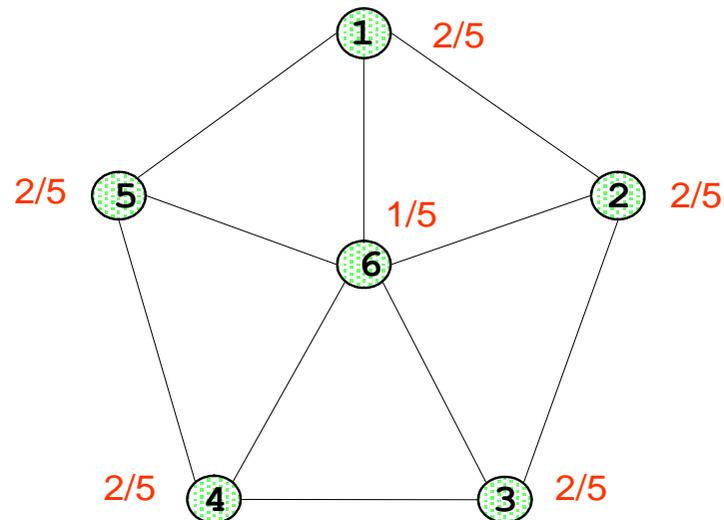
## Esempio

Se  $c = (1, 1, 1, 1, 1)$  è la funzione obiettivo, la soluzione frazionaria è  $x^* = 1/2(1, 1, 1, 1, 1, 0)$ .

Se aggiungiamo la disuguaglianza associata al buco dispari indotto dai nodi dell'insieme  $H = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2 \quad (17)$$

otteniamo la nuova soluzione frazionaria  $x^* = 1/5(2, 2, 2, 2, 2, 1)$ .



+

## Discussione

La disuguaglianza (17) è soddisfatta all'uguaglianza dagli stabili

$\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\},$

quindi induce una faccia massimale (di dimensione 4) dell'involucro convesso dei vettori di incidenza degli insiemi stabili del sottografo indotto da  $H$ .

Al contrario, non essendoci altri stabili che la soddisfano all'uguaglianza, la faccia indotta da (17) non è massimale per  $STAB(G)$ .

È possibile ruotare la faccia indotta da (17) in modo da ottenere una faccia massimale di  $STAB(G)$ ?

+

+

## Rafforzamento

Consideriamo una disuguaglianza della forma:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \alpha x_6 \leq 2 \quad (18)$$

e determiniamo il massimo valore di  $\alpha$  per cui la disuguaglianza rimane valida. Separiamo i due casi:

$x_6 = 0$ . (18) è valida per ogni valore di  $\alpha$

$x_6 = 1$ . (18) diventa:

$$\alpha \leq 2 - x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

Ma  $x_6 = 1$  implica  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ , quindi  $\alpha \leq 2$ .

+

+

+

## Lifting

La disuguaglianza

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 \leq 2$$

è quindi valida per  $STAB(G)$ . Inoltre, essa induce una faccia massimale di  $STAB(G)$ . Infatti, è soddisfatta all'uguaglianza dai vettori caratteristici, affinemente indipendenti, dei sei insiemi stabili

$\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{6\}$ .

La procedura che, data una disuguaglianza valida per  $S \cap \{x \in \{0, 1\}^n : x_6 = 0\}$ , la estende ad una disuguaglianza valida per  $S$ , è detta *lifting*.

+

+

+

## In generale

**Teorema 7** Sia  $S \subseteq \{0, 1\}^n$  e sia

$$\sum_{j=2}^n a_j x_j \leq b \quad (19)$$

una disuguaglianza valida per  $S^0 = S \cap \{x \in \{0, 1\}^n : x_1 = 0\}$ . Se  $S \cap \{x \in \{0, 1\}^n : x_1 = 1\} \neq \emptyset$ , allora

$$\alpha x_1 + \sum_{j=2}^n a_j x_j \leq b \quad (20)$$

è valida per  $S$  per ogni  $\alpha \leq b - \max_{S \cap \{x: x_1=1\}} \{\sum_{j=2}^n a_j x_j\}$ . Se (19) è una faccia di  $\text{conv}(S^0)$  di dimensione  $k$ , e se  $\alpha$  è massimo, allora (20) definisce una faccia di  $\text{conv}(S)$  di dimensione  $k + 1$

+

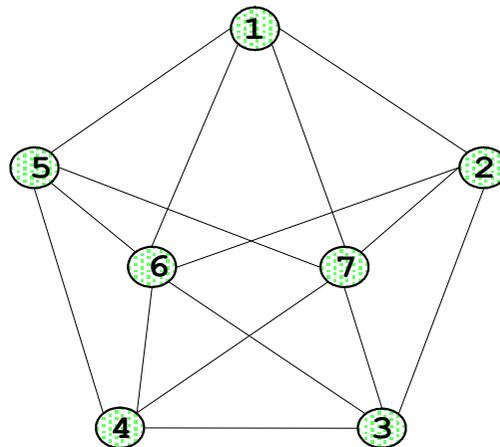
+

+

## Lifting sequenziale

- il teorema precedente può essere usato per “liftare” sequenzialmente tutte le variabili in modo da ottenere una faccetta nell’intero spazio;
- la faccetta generata dipende dalla sequenza di lifting;

Esercizio: estendere la disuguaglianza  $\sum_{j=1}^5 x_j \leq 2$  ad una faccetta di  $STAB(G)$  del seguente grafo:



+

+

+

## “Downlifting”

**Teorema 8** Sia  $S \subseteq \{0, 1\}^n$  e sia

$$\sum_{j=2}^n a_j x_j \leq b \quad (21)$$

una disuguaglianza valida per  $S^1 = S \cap \{x \in \{0, 1\}^n : x_1 = 1\}$ . Se  $S \cap \{x \in \{0, 1\}^n : x_1 = 0\} \neq \emptyset$ , allora

$$\beta x_1 + \sum_{j=2}^n a_j x_j \leq b + \beta_1 \quad (22)$$

è valida per  $S$  per ogni  $\alpha \leq b - \max_{S \cap \{x: x_1=0\}} \{\sum_{j=2}^n a_j x_j\}$ . Se (21) è una faccia di  $\text{conv}(S^1)$  di dimensione  $k$ , e se  $\beta$  è minimo, allora (22) definisce una faccia di  $\text{conv}(S)$  di dimensione  $k + 1$

+

+

+

## **Approssimazione dei coefficienti di lifting**

- in generale il problema di determinare il coefficiente di lifting ottimo è NP-hard, in quanto coincide con il problema di partenza;
- in pratica, i coefficienti di lifting si calcolano euristicamente: questo garantisce la validità della disuguaglianza liftata, ma non la fattibilità

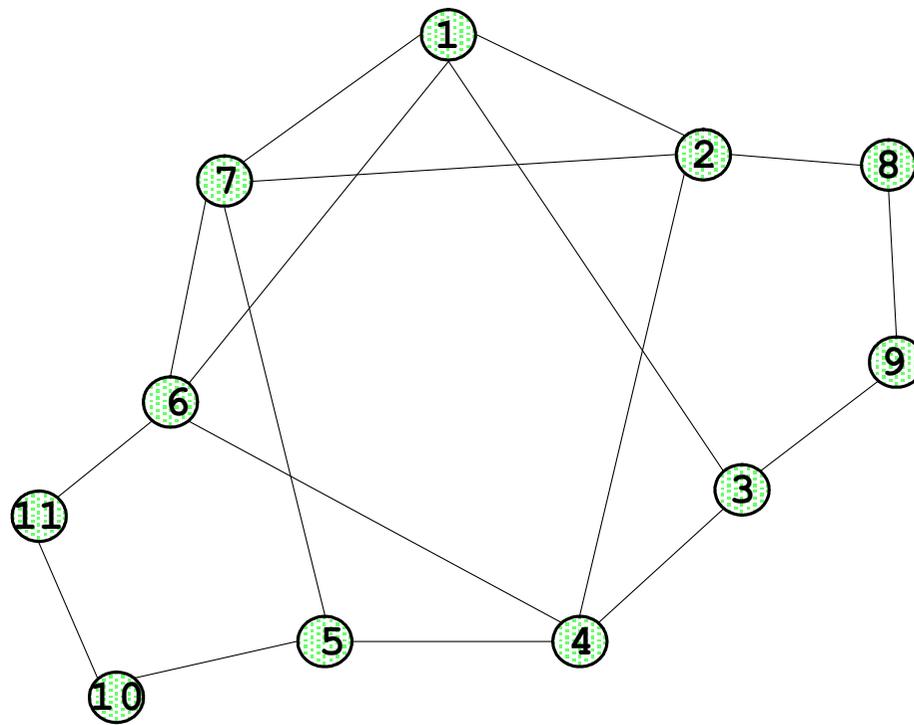
+

+

+

## Esercizio 1

Applicare il metodo del piano di taglio per calcolare un bound per il numero di stabilità del seguente grafo:



+

+

+

## Soluzione

sequenza dei vertici frazionari:

$z^*$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$
5	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
5	1/4	1/4	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
5	1/3	1/3	2/3	1/3	2/3	1/3	1/3	2/3	1/3	1/3	2/3
4.667	1/3	1/3	1/3	1/3	2/3	1/3	1/3	1/3	2/3	1/3	2/3
4.667	2/3	1/3	1/3	1/3	2/3	1/3	0	1/3	2/3	1/3	2/3
4.5	1/2	1/4	1/4	1/2	1/2	1/4	1/4	1/4	3/4	1/4	3/4
4.0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1

Sequenza dei tagli:

$x(1, 2, 7) \leq 1$	clique
$x(1, 6, 7) \leq 1$	clique
$x(2, 3, 4, 8, 9) \leq 2$	5-hole
$x(5, 6, 7, 10, 11) \leq 2$	5-hole
$x(1, 2, 4, 5, 6, 10, 11) \leq 3$	7-cycle
$x(1, 5, 6, 7, 10, 11) \leq 2$	gomory

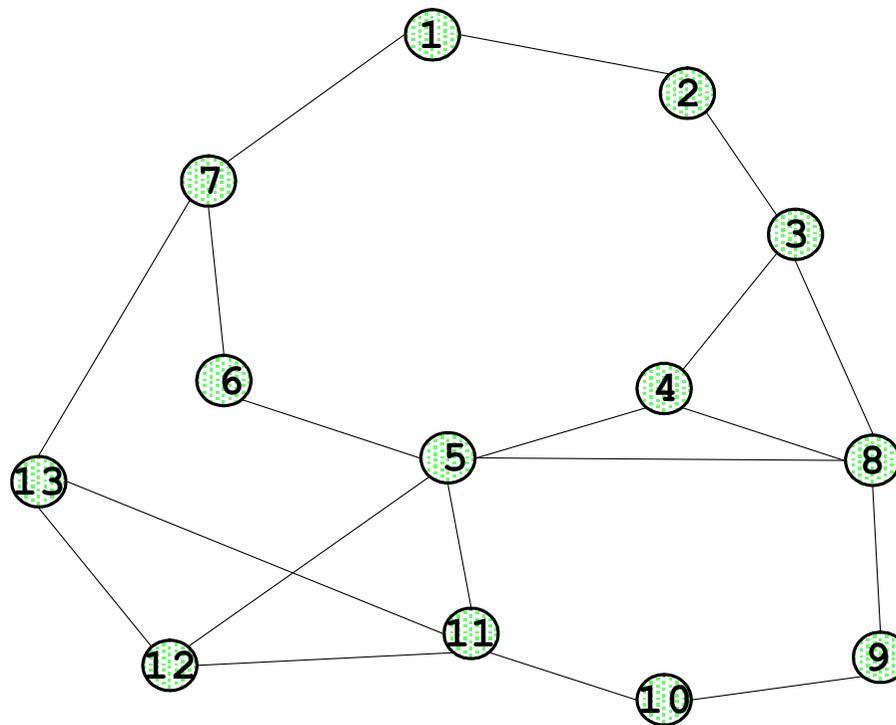
+

+

+

## Esercizio 2

Applicare il metodo del piano di taglio per calcolare un bound per il numero di stabilità del seguente grafo:



+

+

+

## Soluzione

sequenza dei vertici frazionari:

$z^*$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$
6.5	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
6.0	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	0	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
5.67	2/3	1/3	1/3	2/3	1/3	2/3	1/3	0	1/3	2/3	1/3	1/3	2/3
5.5	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	0	0	1	0	1/2	1/2
5.0	1/2	1/2	0	1/2	1/2	1/2	1/2	0	0	1	0	1/2	1/2
5.0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1

Sequenza dei tagli:

$x(3, 4, 8) \leq 1$	clique
$x(5, 11, 12) \leq 1$	clique
$x(11, 12, 13) \leq 1$	clique
$x(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \leq 3$	7-hole liftato
$x(5, 6, 7, 12, 13) \leq 2$	hole

+

+

+

### Esercizio 3

Risolvere il seguente problema di PL01 con il metodo del piano di taglio.

$$\max x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12}$$

$x_1 + x_2 + s_1 = 1$	$x_3 + x_4 + s_{10} = 1$
$x_1 + x_3 + s_2 = 1$	$x_3 + x_7 + s_{11} = 1$
$x_1 + x_5 + s_3 = 1$	$x_3 + x_{10} + s_{12} = 1$
$x_1 + x_{11} + s_4 = 1$	$x_4 + x_8 + s_{13} = 1$
$x_1 + x_{12} + s_5 = 1$	$x_4 + x_{10} + s_{14} = 1$
$x_2 + x_3 + s_6 = 1$	$x_4 + x_{11} + s_{15} = 1$
$x_2 + x_4 + s_7 = 1$	$x_5 + x_9 + s_{16} = 1$
$x_2 + x_6 + s_8 = 1$	$x_6 + x_9 + s_{17} = 1$
$x_2 + x_{12} + s_9 = 1$	$x_7 + x_9 + s_{18} = 1$
$x_8 + x_9 + s_{19} = 1$	$x_{10} + x_{11} + s_{20} = 1$
$x_{10} + x_{12} + s_{21} = 1$	$x_{11} + x_{12} + s_{22} = 1$
$3x_1 + 2x_6 + 3x_9 + s_{23} = 5$	$3x_5 + 2x_6 + 4x_7 + 2x_8 + s_{24} = 7$

+

+

+

## Riferimenti

1. M. Fischetti, Lezioni di Ricerca Operativa, Edizioni Libreria Progetto Padova, 1995.
2. A. Sassano, Formulazioni e piani di taglio, in G. di Pillo, Metodi di ottimizzazione per le decisioni, Atti della Scuola CIRO, Masson Editoriale ESA, 1994.
3. W.J. Cook, W.H. Cunningham, W. R. Pulleyblank, A. Schrijver, Combinatorial Optimization, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1998.

+