

# Il minimo albero ricoprente

## Dati

$G(V, E)$  grafo connesso,  $c_e$  costo associato ad ogni spigolo  $e \in E$

## Problema

Trovare un albero ricoprente di costo minimo

## Algoritmi combinatori noti

Prim e Kruskal

# Formulazione

$$x_e \begin{cases} 1 & \text{se lo spigolo } e \text{ appartiene all'albero ric.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\min c^T x$$

st

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \quad \text{per ogni } S, \text{ tale che } 2 \leq |S| \leq n - 1$$

$$\sum_{e \in E} x_e = n - 1$$

$$x \geq 0$$

# Osservazioni

Osserviamo

che la matrice dei coefficienti non è TU

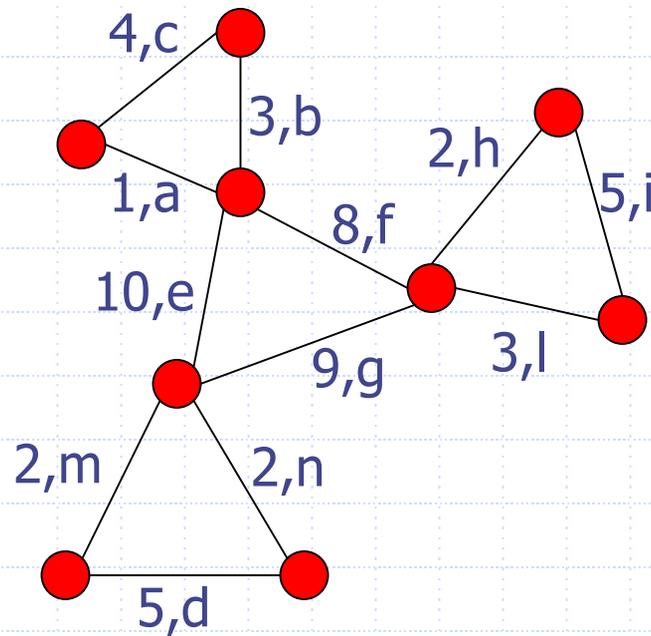
Tuttavia,

si può dimostrare che questa formulazione è "ottima"

Però,

il numero di vincoli della formulazione cresce esponenzialmente con il numero di vertici del grafo  $G$  e "scrivere" la formulazione diventa proibitivo

# Il semplice "dinamico"



# Formulazione n. 1

$$\min x_a + 3x_b + 4x_c + 5x_d + 10x_e + 8x_f + 9x_g + 2x_h + 5x_i + 3x_l + 2x_m + 2x_n$$

st

$$x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f + x_g + x_h + x_i + x_l + x_m + x_n = 8$$

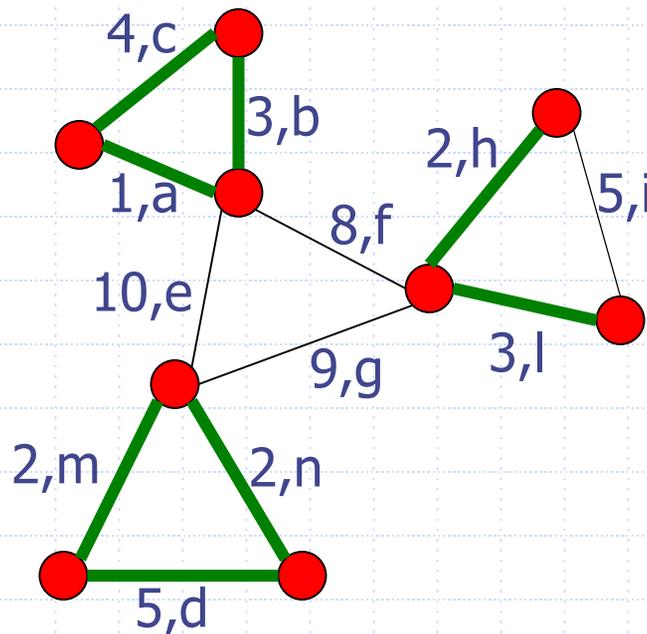
$$x \leq 1$$

$$x \geq 0$$

# Soluzione n. 1

Valore della soluzione: 22

Gli archi verdi di maggiore spessore corrispondono a variabili poste a 1



# Separazione

Domanda

Esiste un vincolo della famiglia

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \text{ per ogni } S, \text{ tale che } 2 \leq |S| \leq n - 1$$

violato dalla soluzione ottima corrente?

**SI!!!** Ad esempio,  $x_d + x_m + x_n \leq 2$

che viene aggiunto alla formulazione corrente

## Formulazione n.2

$$\min x_a + 3x_b + 4x_c + 5x_d + 10x_e + 8x_f + 9x_g + 2x_h + 5x_i + 3x_l + 2x_m + 2x_n$$

st

$$x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f + x_g + x_h + x_i + x_l + x_m + x_n = 8$$

$$x_d + x_m + x_n \leq 2$$

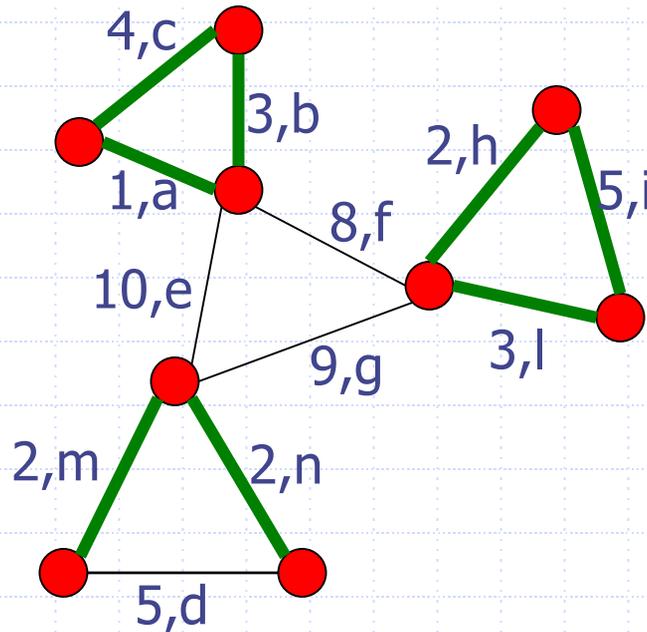
$$x \leq 1$$

$$x \geq 0$$

## Soluzione n. 2

Valore della soluzione: 22

Gli archi verdi di maggiore spessore corrispondono a variabili poste a 1



# Separazione

Domanda

Esiste un vincolo della famiglia

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \text{ per ogni } S, \text{ tale che } 2 \leq |S| \leq n - 1$$

violato dalla soluzione ottima corrente?

**SI!!!** Ad esempio,  $x_h + x_i + x_l \leq 2$

che viene aggiunto alla formulazione corrente

## Formulazione n. 3

$$\min x_a + 3x_b + 4x_c + 5x_d + 10x_e + 8x_f + 9x_g + 2x_h + 5x_i + 3x_l + 2x_m + 2x_n$$

st

$$x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f + x_g + x_h + x_i + x_l + x_m + x_n = 8$$

$$x_d + x_m + x_n \leq 2$$

$$x_h + x_i + x_l \leq 2$$

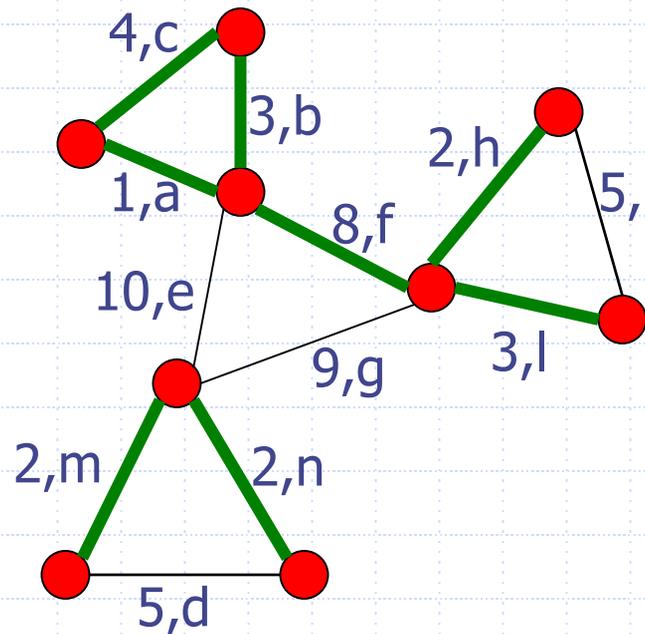
$$x \leq 1$$

$$x \geq 0$$

# Soluzione n.3

Valore della soluzione: 25

Gli archi verdi di maggiore spessore corrispondono a variabili poste a 1



# Separazione

Domanda

Esiste un vincolo della famiglia

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \text{ per ogni } S, \text{ tale che } 2 \leq |S| \leq n - 1$$

violato dalla soluzione ottima corrente?

**SI!!!** Ad esempio,  $x_a + x_b + x_c \leq 2$

che viene aggiunto alla formulazione corrente

## Formulazione n. 4

$$\min x_a + 3x_b + 4x_c + 5x_d + 10x_e + 8x_f + 9x_g + 2x_h + 5x_i + 3x_l + 2x_m + 2x_n$$

st

$$x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f + x_g + x_h + x_i + x_l + x_m + x_n = 8$$

$$x_d + x_m + x_n \leq 2$$

$$x_h + x_i + x_l \leq 2$$

$$x_a + x_b + x_c \leq 2$$

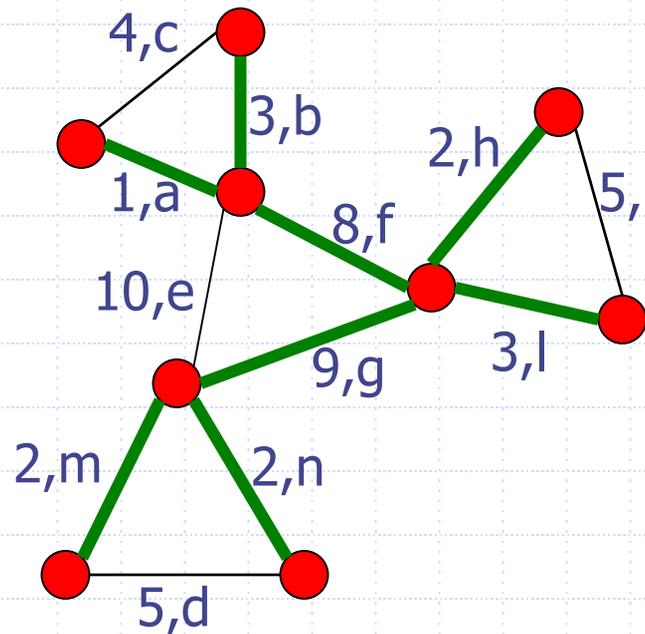
$$x \leq 1$$

$$x \geq 0$$

## Soluzione n.4

Valore della soluzione: 30

Gli archi verdi di maggiore spessore corrispondono a variabili poste a 1



# Separazione

Domanda

Esiste un vincolo della famiglia

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \text{ per ogni } S, \text{ tale che } 2 \leq |S| \leq n - 1$$

violato dalla soluzione ottima corrente?

**NO!!!**

La soluzione trovata è ottima per il rilassamento ed è anche INTERA, ovvero ottima per PL- $\{0,1\}$

# Formulazione "cutset"

$$x_e \begin{cases} 1 & \text{se lo spigolo } e \text{ appartiene all'albero ric.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\min c^T x$$

st

$$\sum_{e \in \partial(S)} x_e \geq 1 \text{ per ogni } S, \text{ tale che } 1 \leq |S| \leq n - 1$$

$$\sum_{e \in E} x_e = n - 1$$

$$x \geq 0$$

# La formulazione "cutset" non è intera

Difatti, la formulazione

$$\min x_a + 3x_b + 4x_c + 5x_d + 10x_e + 8x_f + 9x_g + 2x_h + 5x_i + 3x_l + 2x_m + 2x_n$$

st

$$x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f + x_g + x_h + x_i + x_l + x_m + x_n = 8$$

$$x_e + x_f \geq 1$$

$$x_f + x_g \geq 1$$

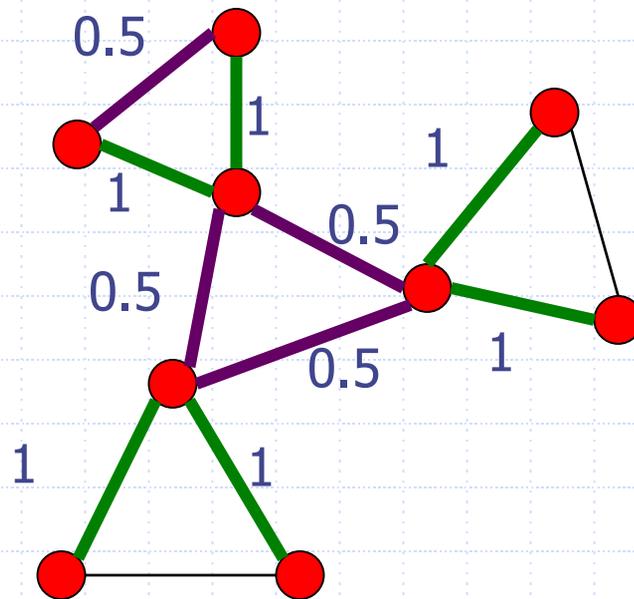
$$x_e + x_g \geq 1$$

$$x \leq 1$$

$$x \geq 0$$

# Soluzione frazionaria

ammette la seguente soluzione ottima, di valore 28.5



che NON ha tagli violati !!!!