

Gerarchia di formulazioni

Quando una formulazione è “migliore” di un'altra?

Definizione

Se un poliedro P_1 , formulazione di \mathcal{F} , è contenuto in P_2 , formulazione di \mathcal{F} , diciamo che P_1 è migliore di P_2 .

In generale, una gerarchia di formulazioni è costituita da un insieme di poliedri

$$P_1 \subseteq P_2 \subseteq P_3 \dots$$

Esempio

Consideriamo un problema di **knapsack** con il vincolo che l'oggetto k può essere scelto se e solo se nella bisaccia sono stati scelti gli oggetti i e j .

Formulazione 1.

$$\max \quad c^T x$$

st

$$ax \leq b$$

$$x_k \leq x_i$$

$$x_k \leq x_j$$

$$x \in \{0,1\}^n$$

Formulazione 2.

$$\max \quad c^T x$$

st

$$ax \leq b$$

$$2x_k \leq x_i + x_j$$

$$x \in \{0,1\}^n$$

Esempio (II)

Il rilassamento lineare della formulazione 1 è migliore della formulazione 2.

Difatti, il vincolo

$$2x_k \leq x_i + x_j$$

è implicato dai vincoli

$$\begin{array}{l} x_k \leq x_i \\ x_k \leq x_j \end{array}$$

Quindi, $P_1 \subseteq P_2$

Formulazione ideale

La formulazione del problema di knapsack NON è una formulazione ideale

Domanda

Esistono casi “fortunati” in cui la formulazione coincide con la formulazione ideale?

Sono in grado di “caratterizzare” le formulazioni ideali in modo da riconoscerle in tempo polinomiale?

Il caso "fortunato"

Consideriamo il rilassamento lineare RL di un PL- $\{0,1\}$ in forma standard

$$\min c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$\text{con } \text{rg}(A) = m \leq n$$

La soluzione ottima si ottiene in corrispondenza di una SBA e ha la forma

$$x^* = (x_{B^*}, x_{N^*}) = (A_{B^*}^{-1}b, 0)$$

* i vincoli $x \leq 1$, sono stati inseriti in A

Il caso "fortunato" (II)

Osservazione

Se la base ottima A_{B^*} ha determinante $\det(A_{B^*}) = \pm 1$, allora RL ha una soluzione intera (0-1)

Difatti:

$$A_{B^*}^{-1} = \frac{1}{\det(A_{B^*})} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}^T$$

$$\alpha_{mm} = -1^{(i+j)} \cdot \det(A_{ij}) \quad [\text{elemento della matrice aggiunta}]$$

Matrici totalmente unimodulari

Quando TUTTE le SBA godono della proprietà $\det(A_B) = \pm 1$?

Definizione

Una matrice A si dice **TOTALMENTE UNIMODULARE (TU)** se ogni sottomatrice quadrata di A ha determinante $\{0, +1, -1\}$

Proprietà delle matrici TU

Una matrice A è TU se e solo se

- i) la matrice trasposta A^T è TU
- ii) la matrice (A, I) è TU

Teorema

Hoffman-Kruskal [1956]

Sia A una matrice intera. Il poliedro P definito da $Ax \leq b, x \geq 0$ è intero *per ogni vettore intero* b se e solo se A è TU

Attenzione

Il teorema è falso se $P = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b\}$. Difatti P può essere intero ma A non è TU

1	1	1
-1	1	0
1	0	0

Condizioni per la TU

Osservazione

Se A è TU, allora $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$

Teorema

A è TU se

- i) $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$
- ii) Ogni colonna ha al più due coefficienti non nulli
- iii) Esiste una partizione (M_1, M_2) dell'insieme delle righe M tale che ogni colonna j contenente due coefficienti non nulli soddisfa

$$\sum_{i \in M_1} a_{ij} = \sum_{i \in M_2} a_{ij}$$

Dimostrazione

Supponiamo che A non sia TU e sia B la più piccola sottomatrice quadrata per cui $\det(B) \notin \{-1, 0, 1\}$.

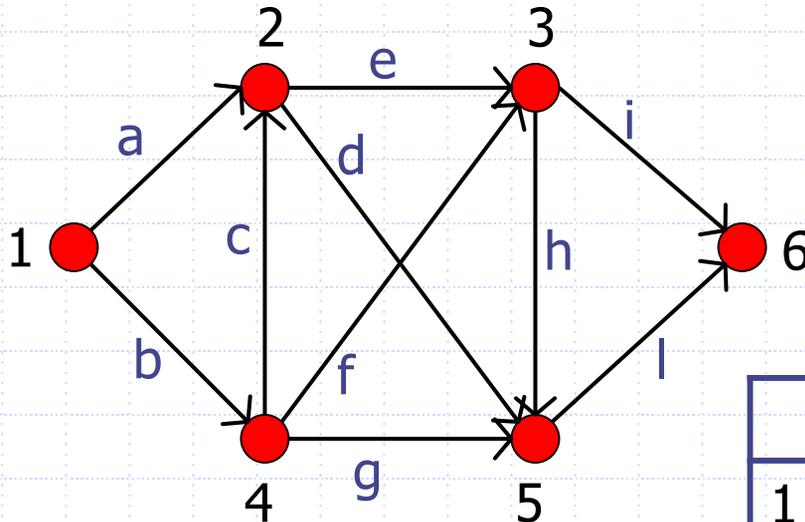
Ora, B ha almeno 2 elementi non nulli per colonna (altrimenti non sarebbe minimale).

Quindi, data la partizione (M_1, M_2) , posso sommare le righe in M_1 e sottrarre le righe in M_2 , ottenendo il vettore nullo.

Ciò implica che B è singolare, i.e. $\det(B)=0$, contraddizione.

Esempi di matrici TU

$G(N, A)$ grafo diretto



\mathcal{A} Matrice di incidenza

nodi-archi

$$M_1 = M, M_2 = \emptyset$$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	-1	1	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	-1	-1	0	1	1	0
4	0	-1	1	0	0	1	1	0	0	0
5	0	0	0	-1	0	0	-1	-1	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1

Formulazione del problema di cammino minimo

Dati

$G(N, A)$ grafo diretto, due nodi (s, t) , vettore $c \in \mathcal{R}_+^{|A|}$

$$z = \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

st

$$\sum_{k \in \partial^+(i)} x_{ik} - \sum_{k \in \partial^-(i)} x_{ki} = 1 \text{ per } i = s$$

$$\sum_{k \in \partial^+(i)} x_{ik} - \sum_{k \in \partial^-(i)} x_{ki} = 0 \text{ per ogni } i \in V \setminus \{s, t\}$$

$$\sum_{k \in \partial^+(i)} x_{ik} - \sum_{k \in \partial^-(i)} x_{ki} = -1 \text{ per } i = t$$

$$x \in \{0,1\}^{|A|}$$

Cammino minimo

$$z = \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

st

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

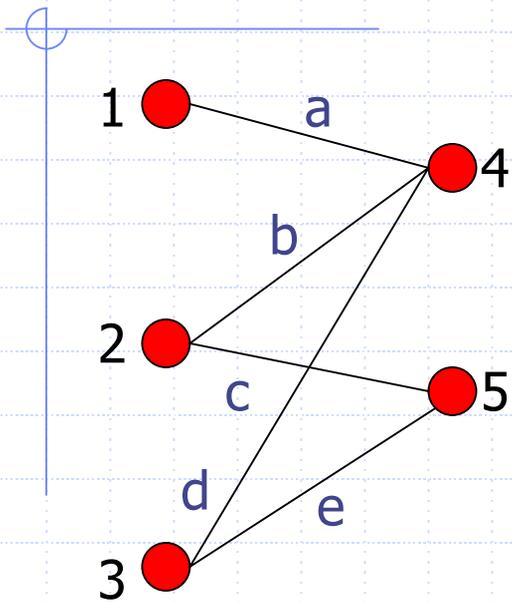
$$x \geq 0$$

$$x \leq 1$$

$$x \in \{0, 1\}$$

La stipula di interezza può essere rimossa in quanto A è TU

Matrice di incidenza di grafi bipartiti



	a	b	c	d	e
1	1	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0
3	0	0	0	1	1
4	1	1	0	1	0
5	0	0	1	0	1

The matrix is partitioned into two submatrices: M_1 (rows 1, 2, 3) and M_2 (rows 4, 5).

Esercizio

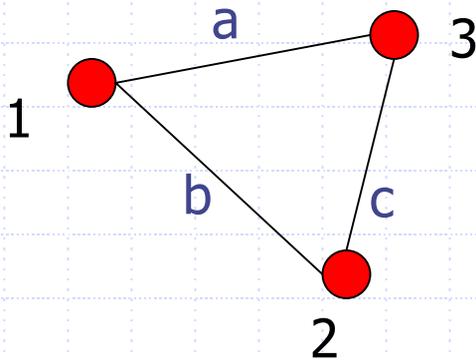
Quali problemi di OC noti ammettono una formulazione avente come matrice dei coefficienti la matrice di incidenza di un grafo bipartito?

Matrici di incidenza

Domanda

Tutte le matrici di incidenza sono TU ?

NO!!!



	a	b	c
1	1	1	0
2	0	1	1
3	1	0	1

Il minimo albero ricoprente

Dati

$G(V, E)$ grafo connesso, c_e costo associato ad ogni spigolo $e \in E$

Problema

Trovare un albero ricoprente di costo minimo

Algoritmi combinatori noti

Prim e Kruskal

Formulazione

$$x_e \begin{cases} 1 & \text{se lo spigolo } e \text{ appartiene all'albero ric.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\min c^T x$$

st

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \quad \text{per ogni } S, \text{ tale che } 2 \leq |S| \leq n - 1$$

$$\sum_{e \in E} x_e = n - 1$$

$$x \geq 0$$

Osservazioni

Osserviamo

che la matrice dei coefficienti non è TU

Tuttavia,

si può dimostrare che questa formulazione è "ottima"

Però,

il numero di vincoli della formulazione cresce esponenzialmente con il numero di vertici del grafo G e "scrivere" la formulazione diventa proibitivo