

Il problema della bisaccia

Avete a disposizione un budget b per gli investimenti dell'anno 2002

Ad ogni progetto è associato

- un costo $a_j (> 0)$
- un guadagno atteso $c_j (> 0)$

Problema

Scegliere l'insieme di progetti in modo che sia massimizzato il guadagno atteso senza eccedere il budget b

Se ogni progetto può essere attivato non solo per intero ma anche in parte si parla di **knapsack continuo**

Il knapsack continuo

Il problema

$$\begin{aligned} & \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \text{st} \\ & \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \quad (\text{KRL}) \\ & 0 \leq x_j \leq 1 \text{ per } j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

è un rilassamento del problema di knapsack 0-1.

Infatti, la collezione degli insiemi ammissibili del problema di knapsack 0-1 è contenuta nella regione ammissibile del problema di knapsack continuo

Il knapsack continuo

Come si risolve knapsack continuo?

Essendo formulato come problema di Programmazione Lineare, si può risolvere utilizzando il metodo del simplesso [ricordate che la complessità del metodo del simplesso non è provato essere polinomiale!]

In alternativa

Supponiamo di riordinare gli elementi della bisaccia in modo che:

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \dots \geq \frac{c_n}{a_n} \quad \text{e sia } h \text{ l'indice minimo per cui } \sum_{j=1}^h a_j > b$$

La soluzione $x_1 = 1, x_2 = 1, \dots, x_{h-1} = 1, x_h = f, x_{h+1} = 0, \dots, x_n = 0$

$$\text{con } f = \frac{\left(b - \sum_{j=1}^{h-1} a_j\right)}{a_h} \quad \text{è ottima per (KLR)}$$

Ricapitolando

Abbiamo definito per il knapsack 0-1 un upper bound con le seguenti proprietà:

1. L'upper bound è "continuo", nel senso che si ottiene dalla soluzione di un problema di Programmazione Lineare e non da un problema di OC
2. L'upper bound può essere calcolato con un algoritmo più efficiente rispetto al metodo del simplesso, ma in ogni caso è polinomiale

Domanda

Può essere generalizzata questa tecnica di rilassamento?

Sostituendo la "stipula" $x \in \{0, 1\}$ con il vincolo $0 \leq x \leq 1$ di una formulazione di un problema di PL- $\{0,1\}$, si ottiene sempre un rilassamento denominato **Rilassamento Lineare**

Dualità

Definizione

Due problemi di ottimizzazione

$$z = \max \{f(x) : x \in X\}$$

$$w = \min \{g(y) : y \in Y\}$$

formano una coppia duale “debole” se $f(x) \leq g(y)$ per ogni $x \in X$ e $y \in Y$.

Se $z=w$ si dice che formano una coppia duale “forte”.

Vantaggio fondamentale rispetto al rilassamento

Per ottenere un bound attraverso il rilassamento, il problema rilassato va risolto all’ottimo. Invece, per una coppia duale **ogni** soluzione ammissibile $y \in Y$ ($x \in X$) è un upper (lower) bound per z (w)

Esempi

1. Il problema di trovare un matching di massima cardinalità e quello di trovare un node cover di minima cardinalità formano una coppia duale debole per ogni grafo G
2. Il problema di trovare un insieme stabile di massima cardinalità e quello di trovare un edge cover di minima cardinalità formano una coppia duale debole per ogni grafo G

Entrambe queste coppie di problemi godono della dualità forte se G è bipartito (Teorema di Konig e Teorema di Gallai)

Formulazioni

Consideriamo il seguente problema di Knapsack 0-1

$$\max 5x_1 + 2x_2$$

st

$$3x_1 + 4x_2 \leq 6$$

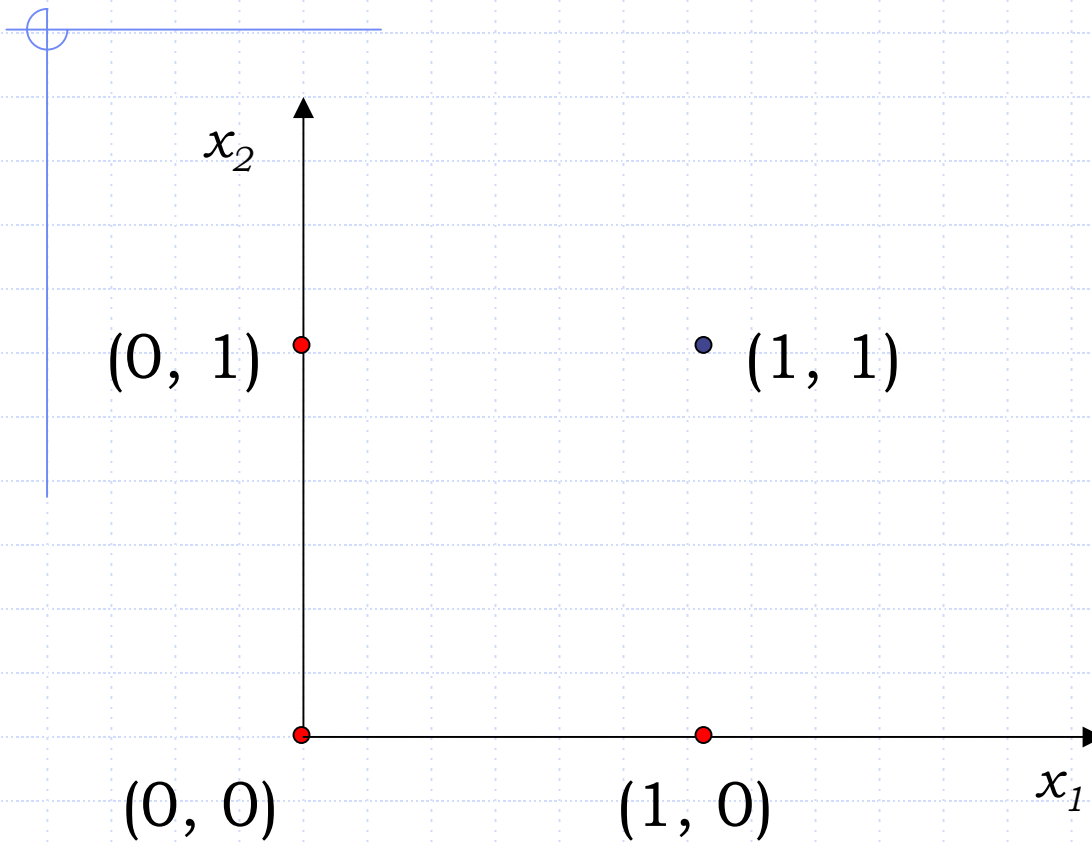
$$x \in \{0, 1\}^2$$

Insiemi ammissibili

$$F = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$$

Rappresentazione sul piano degli insiemi ammissibili

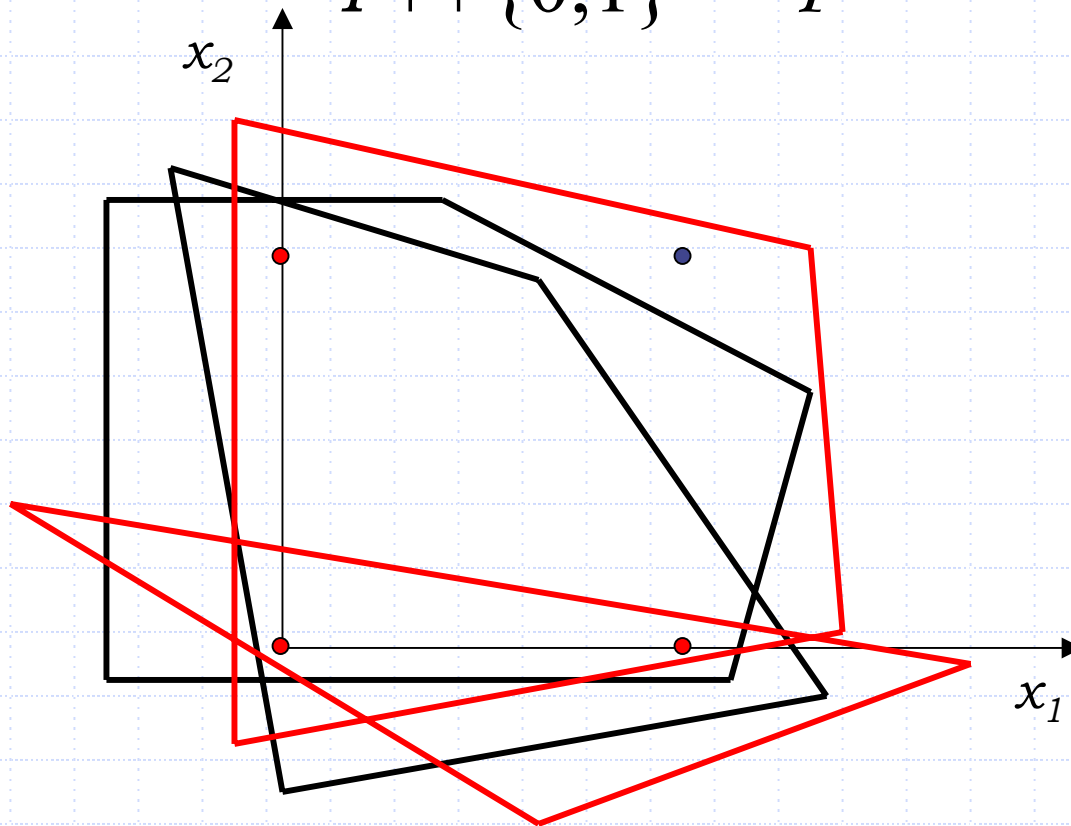
Insiemi ammissibili



Formulazione

Un poliedro P è una formulazione di un problema di OC se e solo se

$$P \cap \{0,1\}^n = \mathcal{F}$$



Il rilassamento lineare ...

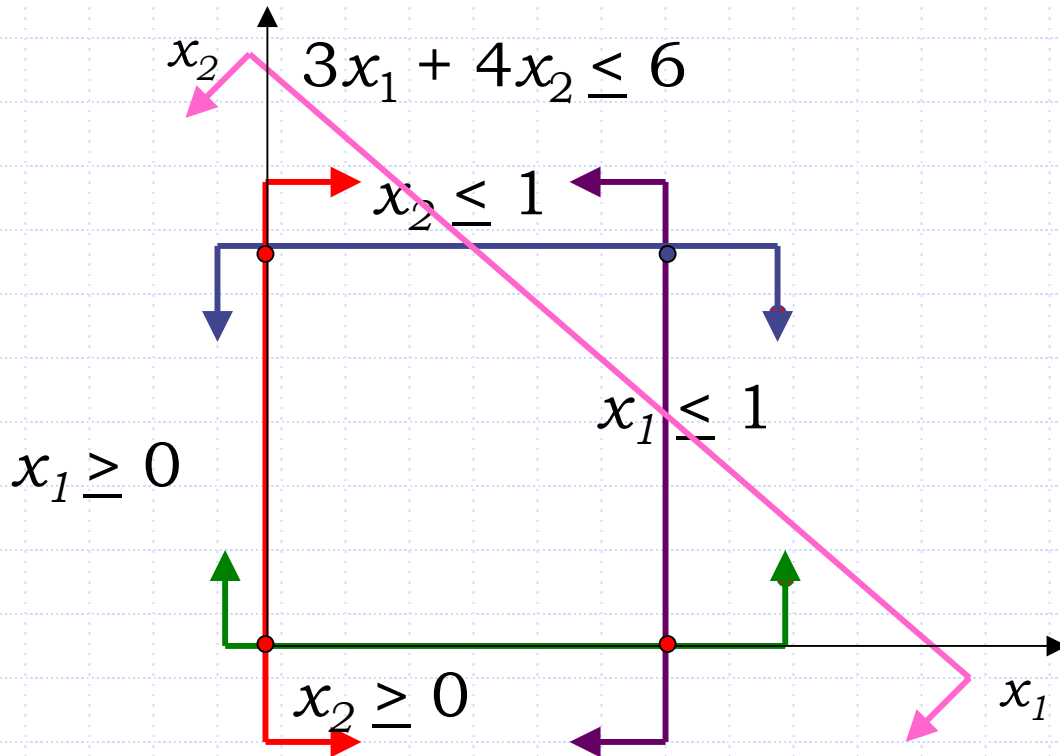
Il problema di knapsack 0-1

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 2x_2 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 6 \\ & x \in \{0,1\}^2 \end{aligned}$$

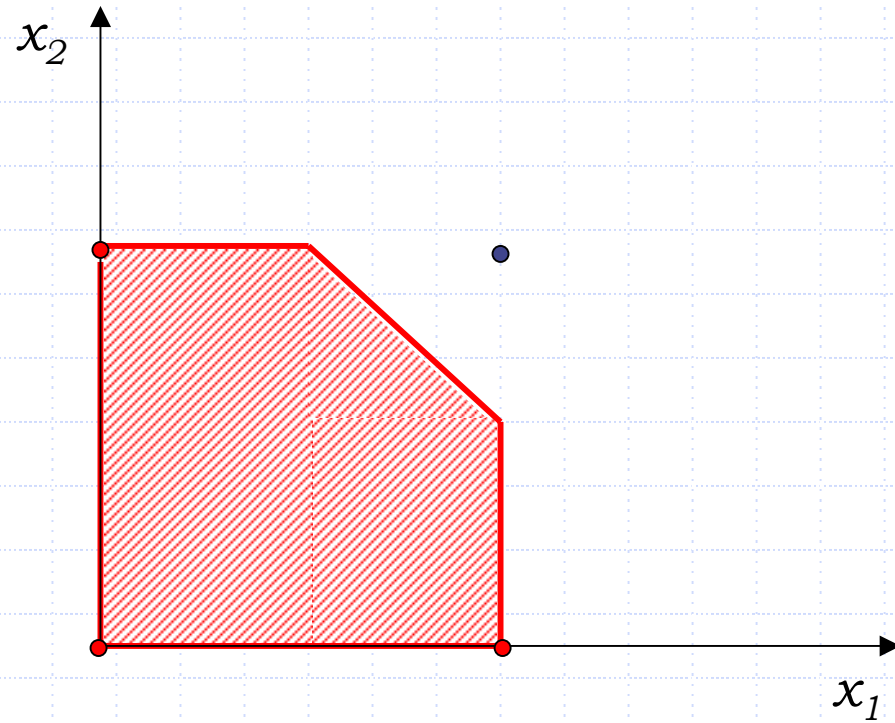
ha come rilassamento lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 2x_2 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

... è un poliedro ...



... ovvero, è una formulazione



Gerarchia di formulazioni

Quando una formulazione è “migliore” di un’altra?

Definizione

Se un poliedro P_1 , formulazione di \mathcal{F} , è contenuto in P_2 , formulazione di \mathcal{F} , diciamo che P_1 è migliore di P_2 .

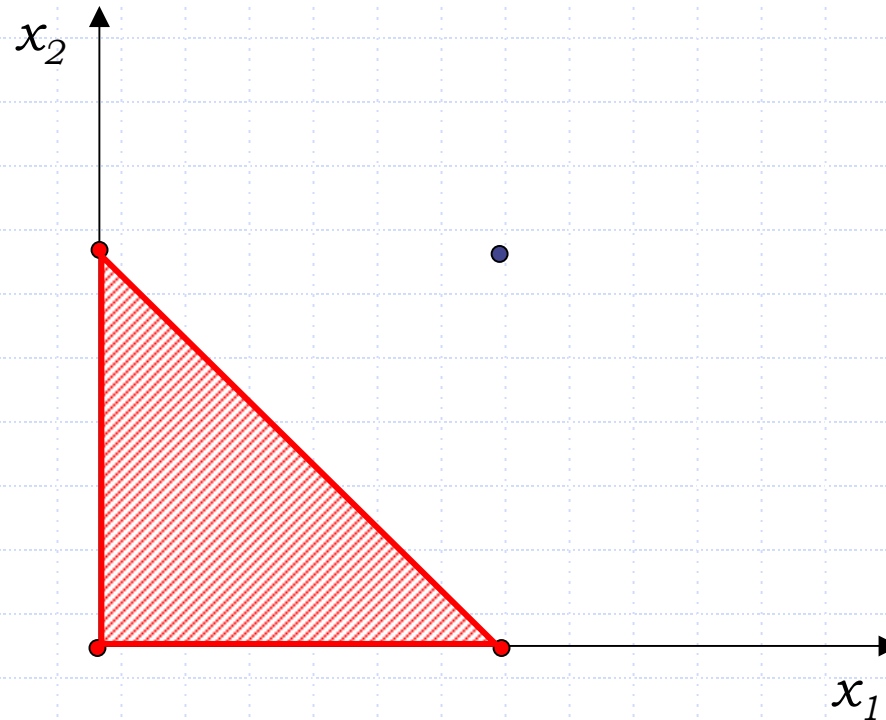
In generale

$$P_1 \subseteq P_2 \subseteq P_3 \dots$$

Esiste una formulazione “ideale”?

Formulazione ideale

“Geometricamente” è il più piccolo poliedro contenente \mathcal{F}



Come si ottiene la formulazione ideale?

Proprietà

Osservazione

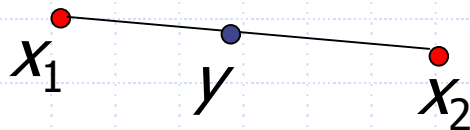
Ogni vertice del poliedro “formulazione ideale” è in corrispondenza biunivoca di un insieme ammissibile.

Definizione

Dati due vettori x_1 e x_2 di R^n si definisce combinazione convessa il vettore

$$y = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \text{ con } \lambda \in [0, 1]$$

Esempio:



Involucro convesso

Definizione

L'insieme di tutti le possibili combinazioni convesse di un insieme di vettori X di R^n prende il nome di *involucro convesso* e si indica con $\text{conv}(X)$

Osservazione

$\text{conv}(X)$ è un poliedro

Pertanto,

la formulazione ideale di F è $\text{conv}(F)$

Calcolo di $\text{conv}(\mathcal{F})$

In linea di principio ...

Dati gli insiemi ammissibili

$$\mathcal{F} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$$

$y \in \text{conv}(\mathcal{F})$ se e solo se si può esprimere come:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$

... a questo punto

Attenzione

questo sistema è nello spazio R^{n+m} , se m sono gli insiemi ammissibili.

Quindi

per ottenere la formulazione ideale devo “proiettare” il sistema nello spazio R^n

A questo scopo utilizzo l’algoritmo di Fourier-Motzkin (...) che mi consente di “eliminare” le variabili λ

Punto della situazione

Dato un problema di OC

1. Elenco tutti gli insiemi ammissibili
2. Rappresento gli insiemi ammissibili come vettori a componenti in $\{0,1\}$
3. Scrivo l'involucro convesso applicando la definizione
4. Con l'algoritmo di Fourier-Motzkin elimino i coefficienti della combinazione convessa e ottengo una formulazione ideale nello spazio R^n
5. Applico il metodo del simplesso e trovo la soluzione ottima

È efficiente questo algoritmo?

Efficienza del calcolo di $\text{conv}(\mathcal{F})$

Problemi

1. Gli insiemi ammissibili sono tipicamente in numero esponenziale
2. L'algoritmo di Fourier-Motzkin non ha complessità polinomiale

Però

Sappiamo che una formulazione ideale esiste sempre

Quindi

1. Caso MOOOLTO fortunato: ho una formulazione che è proprio la formulazione ideale
2. Tento di approssimare la formulazione ideale costruendo una gerarchia di formulazioni a partire da una formulazione iniziale