

Rafforzamento di formulazioni

Il problema di knapsack

$$\max 5x_1 + 2x_2$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 6 \quad (X)$$

$$x \in \{0, 1\}^2$$

ha come rilassamento lineare

$$\max 5x_1 + 2x_2$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_1 \leq 1$$

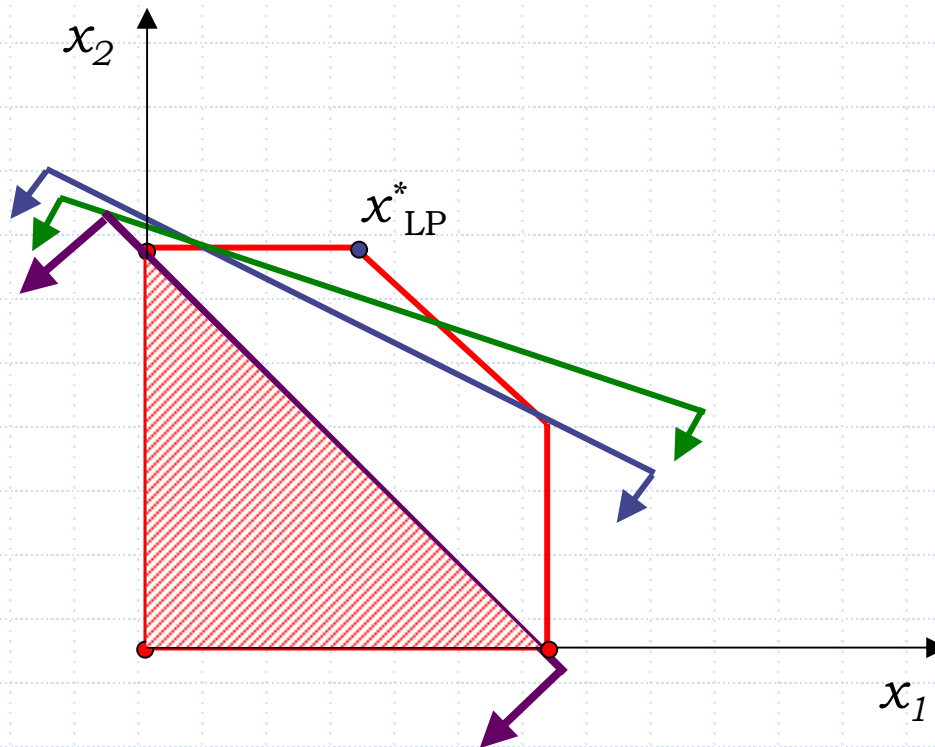
$$x_2 \leq 1$$

Indichiamo con x_{LP}^* la soluzione ottima del rilassamento e con $\text{conv}(X)$ l'involucro convesso delle soluzioni ammissibili di X

Separazione

Domanda

Possiamo individuare una disequazione **valida** per $\text{conv}(X)$ e che "separa" x_{LP}^* da $\text{conv}(X)$?



Separazione

La risposta è **SI!!!**

Difatti, $x_{LP}^* = (1, 3/4)$ è soluzione ottima di

$$\max 5x_1 + 2x_2$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 6$$

$$x \in [0, 1]^2$$

e la disequazione

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

a) è valida per **conv (X)** [non “taglia” nessuna soluzione intera di X]

b) è violata da x_{LP}^* , cioè $1 + 3/4 > 1$

Minimal cover

Sia $\mathcal{X} = \{x \in \{0,1\}^n : \sum_{j=1, \dots, n} a_j x_j \leq b\}$

Definizione

Un insieme $C \subseteq N = \{1, \dots, n\}$ è un *cover* se e solo se

$$\sum_{j \in C} a_j > b$$

Un cover è *minimale* se, comunque preso $j \in C$, l'insieme $C \setminus \{j\}$ NON è un cover

Osservazione

Un cover è descritto da un insieme di indici: es. $\{1, 3, 4\}$

Un cover ha associato un vettore caratteristico non ammissibile per \mathcal{X} .

Il vettore caratteristico del cover $\{1, 3, 4\}$ è $(1, 0, 1, 1)$

Disequazioni cover

Teorema

Se $C \subseteq N$ è un cover, la disequazione

$$\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1 \quad (*)$$

è valida per $\text{conv}(X)$.

Dimostrazione

Scegliamo un vettore $x^R \in \{0,1\}$, t.c. $\sum_{j \in C} x_j > |C| - 1$ e dimostriamo che $x^R \notin X$

Chiaramente, $|R \cap C| = |C|$, quindi $C \subseteq R$.

Quindi:

$$\sum_{j \in N} a_j x_j^R = \sum_{j \in R} a_j \geq \sum_{j \in C} a_j > b$$

ovvero $x^R \notin X$.

Esempio

Sia

$$\max 15 x_1 + 9 x_2 + 8 x_3 + 6 x_4 + 5 x_5 + 4 x_6 + x_7$$

$$11 x_1 + 6 x_2 + 6 x_3 + 5 x_4 + 5 x_5 + 4 x_6 + x_7 \leq 19$$

$$x \in [0,1]^7$$

$$x_{LP}^* = (1, 1, 1/3, 0, 0, 0, 0)$$

Una disequazione cover violata da x_{LP}^* è, ad esempio,

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

Un algoritmo che consente di individuare questa disequazione si chiama **Oracolo di Separazione**

Oracolo di Separazione

$$\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1 \quad \longrightarrow \quad \sum_{j \in C} (1 - x_j) \leq 1$$

La disequazione cover è violata se e solo se

$$\sum_{j \in C} (1 - x_{LPj}^*) < 1$$

Consideriamo il seguente problema di OC, con soluzione ottima y_{SEP}^* di valore z_{SEP}^*

$$SEP = \min \left\{ \sum_{j \in C} 1 - x_{LPj}^*, C \text{ è un cover del vincolo di knapsack} \right\}$$

Se $z_{SEP}^* < 1$ allora esiste una disequazione cover violata associata a y_{SEP}^* , altrimenti non esiste una dis. cover violata

Formulazione

Variabili decisionali

$y_j = 1$ se l'indice j è nel cover

$y_j = 0$ altrimenti

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{j=1}^n (1 - x_{LPj}^*) y_j$$

Vincoli

$$\sum_{j=1}^n a_j y_j \geq b + 1$$

$$y \in \{0,1\}^n$$

Esempio (II)

$$\max 15 x_1 + 9 x_2 + 8 x_3 + 6 x_4 + 5 x_5 + 4 x_6 + x_7$$

$$11 x_1 + 6 x_2 + 6 x_3 + 5 x_4 + 5 x_5 + 4 x_6 + x_7 \leq 19$$

$$x \in [0,1]^7$$

$$x^*_{\text{LP}} = (1, 1, 1/3, 0, 0, 0, 0)$$

Problema di separazione

$$\min (1 - 1) y_1 + (1 - 1) y_2 + (1 - 1/3) y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7$$

$$11 y_1 + 6 y_2 + 6 y_3 + 5 y_4 + 5 y_5 + 4 y_6 + y_7 \geq 20$$

$$y \in \{0,1\}^7$$

$$y^* = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0); z^* = 2/3 < 1$$

Pertanto...

1. Il valore di z_{SEP}^* è < 1 , ovvero esiste una disequazione cover violata
2. La disequazione è scritta in corrispondenza agli indici che hanno valore 1 in y_{SEP}^* , ovvero

$$y_{SEP}^* = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0) \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \leq 2.$$

Aggiungo la disequazione alla formulazione:

$$\max 15 x_1 + 9 x_2 + 8 x_3 + 6 x_4 + 5 x_5 + 4 x_6 + x_7$$

$$11 x_1 + 6 x_2 + 6 x_3 + 5 x_4 + 5 x_5 + 4 x_6 + x_7 \leq 19$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x \in [0,1]^7$$

$$x_{LP}^* = (1, 1, 0, 2/5, 0, 0, 0)$$

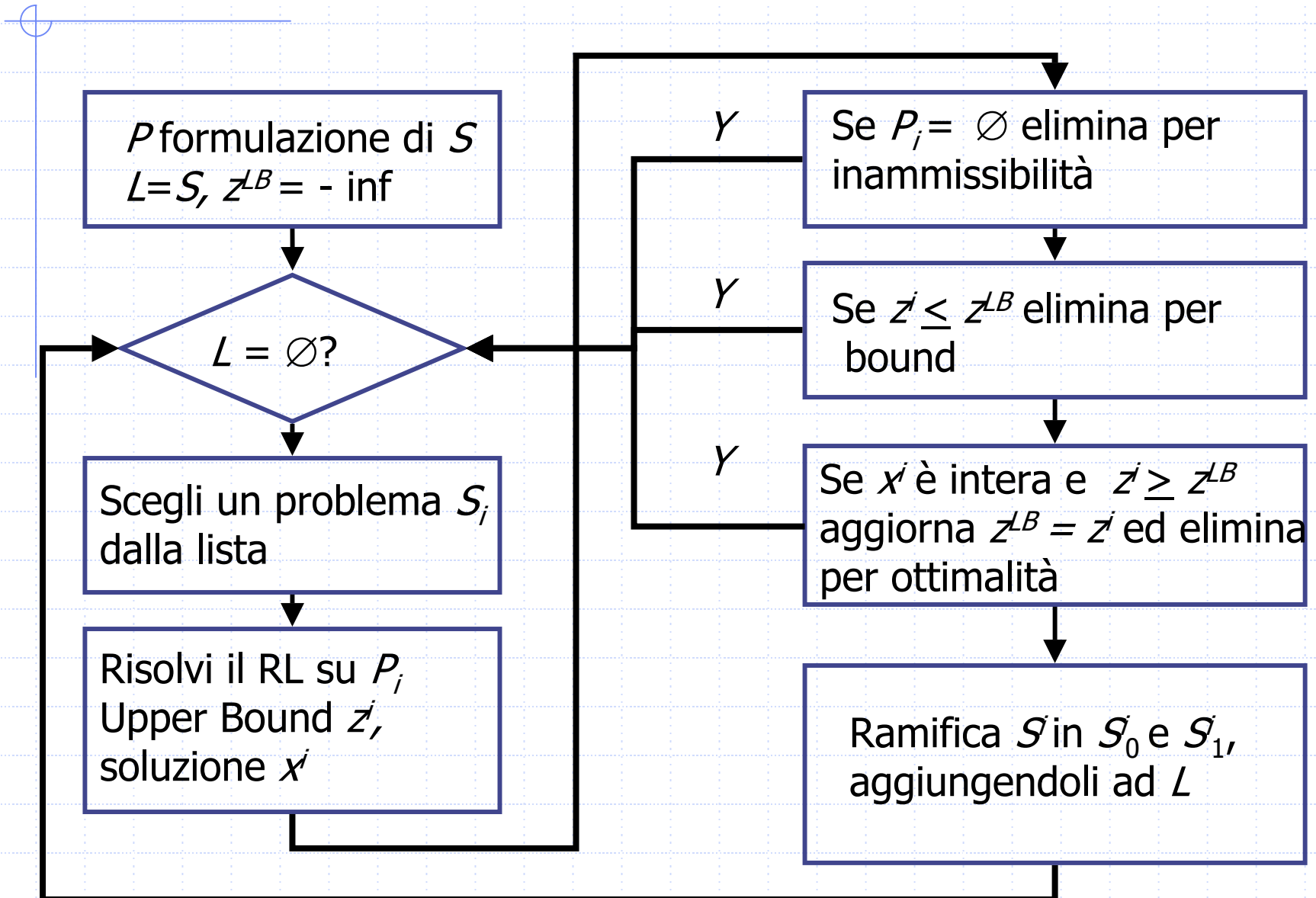
Ricapitolando...

Algoritmo del piano di taglio (CUT)

Data una formulazione di un problema di OC

1. Calcolo la soluzione ottima x_{LP}^*
2. Se $x_{LP}^* \in \{0, 1\}^n$ STOP altrimenti vai a 3.
3. Definisco un problema di separazione
4. Risolvo (all'ottimo ?) il problema di separazione
5. Se esiste una disequazione violata la aggiungo alla formulazione corrente e torno al punto 1, altrimenti STOP

Branch-and-Bound



Cut-and-branch

